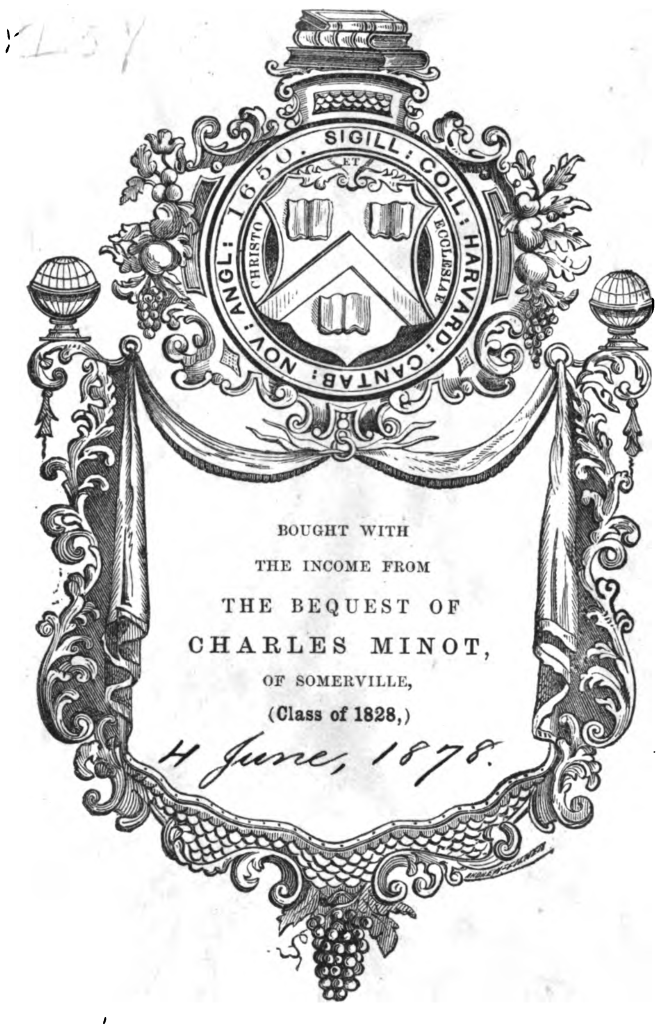

Harvard College Library.
1876.


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE

PRINCIPIEN

DER

FLÄCHENTHEORIE.

VON

DR. REINHOLD HOPPE,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BERLIN,
ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU UPSALA.

LEIPZIG, 1876.
C. A. KOCH'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.
(J. SENGBUSCH.)

1878, June 4,
Minot fund.

Die gegenwärtige Bearbeitung der Flächentheorie reiht sich einer grössern Anzahl ähnlicher Arbeiten an, welche in neuster Zeit in französischen und italienischen Journalen erschienen sind. Das erwachte Streben, die Methode in successiven Schritten dem Ziele einer allseitig befriedigenden und dadurch definitiven Gestaltung zuzuführen, wovon dieselben Zeugniss ablegen, wird auch den neuen Versuch rechtfertigen, welcher das gleiche Ziel verfolgt. Es liegt mir jedoch ob, kurz zu bezeichnen, worin er sich unterscheiden soll, und inwiefern ich ihm einen Fortschritt vindicire. Ein Teil der betreffenden früheren Arbeiten hat, wie wir es verlangen müssen, in der Tat das Ganze der Theorie in Auge, sie lassen sich aber in der Wahl ihres Ausgangspunkts und ihrer Einführungen — anscheinend, denn Erklärung darüber wird nicht gegeben — durch apriorische Argumente bestimmen, die ich nicht für entscheidend halten kann; sie wählen dazu eine zu breite Basis, und erschweren infolge dessen den Einblick durch einen zu grossen Formelapparat. Andere Bearbeitungen hingegen sind mehr auf eine geeignete Basis bedacht gewesen; aber sie richteten sie nur auf leichte Herleitung gewisser Theoreme ein. Wir müssen beide Forderungen vereinigen. Die Principien müssen disponibele Werkzeuge der Untersuchung in allen Richtungen sein, ebendarum aber auch eine leichte Handhabung gestatten, sich daher in Einführungen auf den geringst möglichen Umfang beschränken. Ueber die Richtigkeit der Wahl kann nur der Erfolg entscheiden. Der Punkt, in welchem die Methoden aus einander gehen, und der bestimmend für die ganze fernere Gestaltung wird, ist die

Einführung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung; denn die Gaussschen erster Ordnung sind allen gemeinsam und es ist kein Grund erdenklich davon abzugehen. Ich habe nur zu ihrer Bezeichnung des leichtern Schreibens und Lesens wegen die kleinen Buchstaben e, f, g statt der grossen gewählt. Die von mir aufgestellten 3 Fundamentalgrössen 2. Ordnung sind auch schon früher in Anwendung gekommen; doch nehme ich auf die betreffende Arkeit keinen Bezug, weil sie im übrigen keinen Berührungspunkt darbietet. Einziger Bestimmungsgrund war mir vielmehr, dass die theoretisch wichtigen geometrischen Eigenschaften und Bedingungen im einfachsten Connex mit den Werten und Relationen jener 6 Grössen stehen. Die Theorie wird aus folgenden 3 Abschnitten bestehen: I. Entwickelung der theoretisch wichtigen geometrischen Beziehungen auf allgemeiner Grundlage. II. Besondere Liniensysteme, nämlich Krümmungslinien, asymptotische Linien, orthogonal geodätische und Abbildungs-Liniensysteme. III. Besondere Arten von Flächen, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie Lösungen von Problemen zulassen, die allgemein nicht lösbar sind. Die einfachsten Sätze der Curventheorie (Bd. 56. VII.) und der Cinematik (Bd. 55. IX.) setze ich als bekannt voraus.

I. Entwickelung der theoretisch wichtigen geometrischen Beziehungen auf allgemeiner Grundlage.

§. 1. **Bestimmung von Punkten und Linien auf einer Fläche. Fundamentalgrössen 1. Ordnung.** Eine Linie als Ort eines Punktes (xyz), den derselbe bei Variation des Parameters u erzeugt, ist bestimmt durch die Functionen

$$x = x(u); \quad y = y(u); \quad z = z(u)$$

Variirt die Linie mit einem zweiten Parameter v und erzeugt eine Fläche, so ist diese bestimmt durch die Functionen

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v)$$

Dabei erzeugt jeder Punkt der obigen Linie, $u = \text{const.}$, eine neue Linie auf der Fläche, die wiederum bei Variation von u dieselbe Fläche erzeugt. Demnach durchkreuzen sich in jedem Punkte 2 Linien, genannt die Parameterlinien (u) und (v), welche bzhw. bei allein variirendem u und allein variirendem v erzeugt werden. Sofern durch die Werte von u und v der Punkt (xyz) oder der Punkt (uv) bestimmt ist, kann man u, v Coordinaten desselben nennen; zum Unterschied mögen sie superficielle Coordinaten heissen. Für $x = u$, $y = v$, $z = 0$ gehen sie in ebene cartesische Coordinaten über.

Bewegt sich der Punkt (uv) beliebig, d. h. bei beliebiger gleichzeitiger Variation von u und v, längs der Fläche, so ist das Element der erzeugten Linie ∂s ausgedrückt durch

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

wo

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v; \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial u}\partial u + \frac{\partial y}{\partial v}\partial v; \quad \partial z = \frac{\partial z}{\partial u}\partial u + \frac{\partial z}{\partial v}\partial v \qquad (1)$$

Das Resultat der Einführung dieser Werte hat in Bezug auf ∂u, ∂v die Form:

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2 \qquad (2)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ f &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ g &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

gesetzt ist. Die Coefficienten e, f, g heissen die Fundamentalgrössen 1. Ordnung. Sie haben für alle Linien s, die von demselben Punkte ausgehen, in diesem dieselben Werte, während das Verhältniss

$$k = \frac{\partial v}{\partial u}$$

für verschiedene Linien verschieden ist.

Unter dem Winkel zwischen 2 sich schneidenden Linien s, s' versteht man den, welchen ihre Tangenten im Schnittpunkt bilden. Die Richtungscosinus der erstern Tangente sind nach dem Obigen:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{e + 2fk + gk^2}}; \quad \text{etc.}$$

Bezeichnet also ϑ den Winkel zwischen s und s', denen die Werte k und k' entsprechen, so findet man:

$$\cos\vartheta = \frac{e + f(k + k') + gkk'}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)}} \qquad (4)$$

Ist insbesondere s' die Parameterlinie (u), also $k' = 0$, und geht dann ϑ über in ϑ_0, so ist

$$\cos\vartheta_0 = \frac{e\partial u + f\partial v}{\sqrt{e}\sqrt{e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2}} \qquad (5)$$

Lässt man endlich auch s in die Parameterlinie (v), ϑ_0 in D übergehen, so wird $\partial u = 0$, also

$$\cos D = \frac{f}{\sqrt{eg}} \tag{6}$$

Da nun $\sqrt{e}\,\partial u$ und $\sqrt{g}\,\partial v$ die Werte von ∂s bzhw. für $\partial v = 0$ und $\partial u = 0$ sind, so folgt, dass e, g die Quadrate, f das mit dem Cosinus des Winkels zwischen den Parameterlinien multiplicirte Product der beiden Parameterlinienelemente, jedes dividirt durch das Parameterincrement bedeuten.

Aus dieser Bedeutung folgt, dass e, f, g unabhängig von der Lage der Axen der x, y, z sind.

Sind umgekehrt auf zwei Flächen, die man in denselben Parametern u, v darstellt, die Werte von e, f, g dieselben, so sind nach Gl. (2) auch die Längen aller entsprechenden Linien gleich; folglich kann man die eine Fläche durch Biegung ohne Dehnung oder Contraction auf die andere legen, und man hat den Satz:

S. 1. Alle Flächen, die, bezüglich auf dieselben Parameter, gleiche Fundamentalgrössen erster Ordnung haben, sind auf einander abwickelbar.

Endlich folgt noch aus (4) und (6), dass

$$f = 0$$

und

$$e + f(k + k') + gkk' = 0 \tag{7}$$

die Bedingungen des rechtwinkligen Durchschnitts bzhw. der Parameterlinien und zweier beliebigen Linien sind.

§. 2. **Berührungsebene und Normale.** Die Gleichungen der Tangente einer Curve s auf der Fläche sind:

$$\xi = x + R\frac{\partial x}{\partial s}; \quad \eta = y + R\frac{\partial y}{\partial s}; \quad \zeta = z + R\frac{\partial z}{\partial s}$$

Setzt man für ∂x, ∂y, ∂z ihre Werte (1) und eliminirt ∂u, ∂v, so kommt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \xi - x \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \eta - y \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \zeta - z \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

das ist die Gleichung einer Ebene. Da sie ∂u, ∂v nicht enthält, so gilt sie gleicherweise für die Tangenten aller Curven, die durch den Punkt (uv) gehen. Die so bestimmte Ebene, in welcher demnach alle diese Tangenten liegen, heisst die Berührungsebene, ihre Normale im Berührungspunkt errichtet die Normale der Fläche. Die Richtungscosinus der einen wie der andern p, q, r müssen den Coefficienten von ξ, η, ζ proportional sein; daher hat man:

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Zur Bestimmung von t nimmt man die Quadratsumme der 3 Grössen; dann kommt:

$$t^2 = eg - f^2 \tag{10}$$

Da die Normale auf allen Tangenten senkrecht steht, so ist für jede Variation längs der Fläche

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0 \tag{11}$$

Der Formel (6) lässt sich jetzt eine zweite an die Seite stellen; es ist

$$f = \sqrt{eg}\cos D; \quad t = \sqrt{eg}\sin D \tag{12}$$

§. 3. **Flächenelement.** Denkt man ein Flächenstück Ω von der Parameterlinie (u) bei variirendem v erzeugt, so nimmt es, wenn v in $v + \partial v$ übergeht, um den unendlich schmalen Streifen $\partial\Omega$ zwischen 2 consecutiven Parameterlinien (u) zu. Dieser Streifen wird zugleich mit dem Flächenstück Ω von der Parameterlinie (v) bei variirendem u erzeugt, und sein Increment $\partial^2\Omega$, das er bei Uebergang von u in $u + \partial u$ erhält, ist das nach allen Richtungen unendlich wenig ausgedehnte Bogenviereck zwischen 2 Par consecutiven Parameterlinien (u) und (v) und heisst als solches das Element der Fläche, in dem Sinne dass durch Integration nach u und v daraus die Fläche Ω erhalten wird. Dieses Bogenviereck lässt sich als ein Parallelogramm in der Berührungsebene betrachten, dessen 2 an den Punkt (uv) anstossende Seiten die auf den Tangenten der Parameterlinien abgetragenen Linienelemente

$$\sqrt{e}\,\partial u, \qquad \sqrt{g}\,\partial v$$

bilden mit dem Winkel D zwischen sich. Der Inhalt ist daher

$$\partial^2\Omega = \sqrt{e}\,\partial u \,.\, \sqrt{g}\,\partial v \sin D$$

das ist nach (12):

$$\partial^2\Omega = t\,\partial u\,\partial v, \quad \text{oder} \quad \Omega = \iint t\,\partial u\,\partial v \tag{13}$$

Gemäss dieser geometrischen Bedeutung der Grösse t kann man dieselbe den Flächendifferentialquotienten nennen.

§. 4. **Körperelement.** Denkt man einen Körper P von einer Fläche, ausgedrückt in den Parametern u, v bei Variation mit einem dritten Parameter w erzeugt, so ist, wenn w in $w + \partial w$ übergeht, das Increment des Körpers ∂P die unendlich dünne Schale zwischen 2 consecutiven Flächen. Während nun das Flächenstück Ω die Schale ∂P erzeugt, erzeugt das Flächenelement $\partial^2 \Omega$ das nach allen Richtungen hin unendlich wenig ausgedehnte Körperelement $\partial^3 P$, in Gestalt eines Prismas auf der Grundfläche $\partial^2 \Omega$ und von einer Höhe gleich der Projection der Verrückung des Punktes (uv) auf die Normale der Fläche. Die Projectionen der Verrückung auf die Axen der x, y, z sind

$$\frac{\partial x}{\partial w}\partial w, \qquad \frac{\partial y}{\partial w}\partial w, \qquad \frac{\partial z}{\partial w}\partial w$$

also ihre Projection auf die Normale

$$h = \left(p\frac{\partial x}{\partial w} + q\frac{\partial y}{\partial w} + r\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial w \tag{14}$$

folglich ist das Körperelement

$$\partial^3 P = h\partial^2\Omega = ht\partial u\partial v \quad \text{oder}$$
$$\partial^3 P = T\partial u\partial v\partial w \tag{15}$$

wo nach Einführung der Werte (14) (9)

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{16}$$

wird.

§. 5. **Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.** Als Fundamentalgrössen 2. Ordnung betrachten wir folgende drei:

$$\left.\begin{aligned} E &= p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ F &= p\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + q\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + r\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} \\ G &= p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Auch diese sind unabhängig von der Lage der Axen der x, y, z, wie eine Orthogonalsubstitution für x, y, z leicht zeigt. Vermittelst ihrer lassen sich nun die Covarianten (d. i. mit der Axenlage variirenden) 2. Ordnung auf je 3 Covarianten 1. Ordnung und Invarianten (d. h. von jener unabhängige) 2. Ordnung zurückführen, in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + A_1\frac{\partial x}{\partial v} + A_2 p \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + B_2 p \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + C_2 p \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= H\frac{\partial x}{\partial u} + H_1\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= J\frac{\partial x}{\partial u} + J_1\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

gültig für jede Lage der x Axe, so dass die Coefficienten dieselben bleiben, wenn x in y und z, p in q und r übergeht. Um die Coefficienten zu bestimmen multipliciren wir die 5 Gleichungen mit $\frac{\partial x}{\partial u}$ und nehmen die Summe der je 3 analogen für x, y, z. Dabei ist hinsichtlich der linken Seiten zu beachten, dass durch Differentiation der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u} + r\frac{\partial z}{\partial u} &= 0 \\ p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v} + r\frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

erhalten wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} + E &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + F &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + F &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} + G &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Dann kommt:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} &= Ae + A_1 f \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} &= Be + B_1 f \\ \frac{\partial f}{\partial v} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} &= Ce + C_1 f \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} -E &= He + H_1 f \\ -F &= Je + J_1 f \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Multiplicirt man dieselben Gleichungen statt dessen mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, so giebt die Summe der analogen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} &= Af + A_1 g \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} &= Bf + B_1 g \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} &= Cf + C_1 g \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} -F &= Hf + H_1 g \\ -G &= Jf + J_1 g \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Hiernach sind je 2 der 10 Coefficienten durch 2 lineare Gleichungen bestimmt, aus denen ihre Werte leicht hervorgehen. Multiplicirt man endlich statt dessen mit p, so giebt die Summe der Analogen:

$$E = A_2; \quad F = B_2; \quad G = C_2$$

und die 2 letzten Gleichungen sind identisch erfüllt. Sofern die gefundenen Werte unabhängig von der Axenlage sind, ist die anfängliche Aufstellung gerechtfertigt.

§. 6. **Relationen zwischen den Fundamentalgrössen.** Differentiirt man die erste, zweite, vierte der Gl. (18) (19) nach v, die zweite, dritte, fünfte nach u, so erhält man je 2 Ausdrücke für $\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}$, die einander gleichgesetzt 3 Gleichungen ergeben, sämmtlich von der Form

$$K\frac{\partial x}{\partial u} + K_1\frac{\partial x}{\partial v} + K_2 p = 0$$

in der sie mit Hülfe derselben Gl. (18) (19) dargestellt werden können. Da diese für jede Axenlage gelten, so muss

$$K = 0; \quad K_1 = 0; \quad K_2 = 0$$

sein. Unter den so entstehenden 9 Gleichungen ist eine für sich von selbst erfüllt; die übrigen geben übereinstimmend nur folgende 3 unabhängigen Resultate:

$$4(EG - F^2) + 2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right)$$

$$+ \frac{e}{t^2}\left\{\left(2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v} - \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$+ \frac{f}{t^2}\left\{2\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial e}{\partial v} + 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - 4\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right\}$$

$$+ \frac{g}{t^2}\left\{\left(2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial e}{\partial u} - \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\} = 0 \qquad (26)$$

$$2t^2\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\frac{\partial e}{\partial v} + (Fg - Gf)\frac{\partial e}{\partial u}$$

$$+ 2(Ge - Ff)\frac{\partial f}{\partial u} + (Ef - Fe)\frac{\partial g}{\partial u} = 0 \qquad (27)$$

$$2t^2\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\frac{\partial g}{\partial u} + (Gf - Fg)\frac{\partial e}{\partial v}$$

$$+ 2(Eg - Ff)\frac{\partial f}{\partial v} + (Fe - Ef)\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \qquad (28)$$

Die erste, welche wir die **Gauss'sche Relation** nennen können, ist wichtig, sofern sie zeigt, dass die Grösse $EG - F^2$ für bestimmte Parameter nur von Fundamentalgrössen 1. Ordnung abhängt, folglich nach §. 1. auf allen auf einander abwickelbaren Flächen denselben Wert hat.

§. 7. **Relation zwischen den Krümmungen berührender Curven (Meusnier'scher Satz).** Multiplicirt man die erste der Gl. (21) mit ∂u^2, die zweite und dritte mit $\partial u \partial v$, die vierte mit ∂v^2 und addirt sie, so kommt:

$$\partial p \partial x + \partial q \partial y + \partial r \partial z + E\partial u^2 + 2F\partial u \partial v + G\partial v^2 = 0 \qquad (29)$$

wo die vollständigen Differentiale gemäss der Variation in einer beliebigen Richtung längs der Fläche, der Richtung der Tangente einer Curve s zu nehmen sind. Wendet man auch Gl. (11) auf dieselbe Curve an, dividirt beide Gleichungen durch ∂s und differentiirt dann letztere nach dem Krümmungswinkel τ dieser Curve, so kommt:

$$p\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial s} + q\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial s} + r\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{E\partial u^2 + 2F\partial u \partial v + G\partial v^2}{\partial \tau \partial s}$$

Da die 2mal 3 Factoren zur Linken die Richtungscosinus der Flächennormale und der Hauptnormale von s sind, so drückt die Linke den Cosinus des Winkels zwischen beiden Normalen aus. Setzen wir diesen $= \Theta$, so wird die Gleichung:

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} \cos \Theta = \frac{E \partial u^2 + 2F \partial u \partial v + G \partial v^2}{e \partial u^2 + 2f \partial u \partial v + g \partial v^2} \tag{30}$$

Die Grösse zur Rechten hängt nur von u, v und $\frac{\partial v}{\partial u}$ ab, welche einen Punkt und eine Tangentialrichtung bestimmen, ist also dieselbe für alle Curven s auf der Fläche, die sich im Punkte (uv) berühren. Wir legen nun allen diesen Curven diejenige zugrunde, in welcher eine durch die Flächennormale und durch jene Tangente gelegte Ebene die Fläche schneidet. Diese ebene Curve, kurz bezeichnet durch den Normalschnitt im Punkte (uv) für die Richtung $(\partial u, \partial v)$, hat die Flächennormale zur Hauptnormale, also ist für sie $\Theta = 0$. Ferner drückt $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ die Krümmung, $\frac{\partial s}{\partial \tau}$ den Krümmungsradius der Curve s aus. Bezeichnet also ϱ den Krümmungsradius des Normalschnitts, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E \partial u^2 + 2F \partial u \partial v + G \partial v^2}{e \partial u^2 + 2f \partial u \partial v + g \partial v^2} \tag{31}$$

woraus verglichen mit (30):

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \varrho \cos \Theta \tag{32}$$

Wir haben demnach zur Charakterisirung der Fläche in einem Punkte von jetzt an nur die Krümmungen von Normalschnitten zu untersuchen.

§. 8. **Summe der Krümmungen zweier sich unter rechten Winkeln schneidenden Normalschnitte.** Ohne Rücksicht auf die Bedeutung der Buchstaben hat man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2) \\ = 2\{e + f(k + k') + gkk'\}\{E + F(k + k') + Gkk'\} \\ + (eG - 2fF + gE)(k - k')^2\end{aligned} \tag{33}$$

Haben jetzt e, f, g, k, k' die Bedeutung von §. 1., d. h. sind k, k' die Werte von $\frac{\partial v}{\partial u}$ für 2, im Punkte (uv) sich schneidende Curven, so ist nach Gl. (7)

$$e + f(k + k') + gkk' = 0 \tag{7}$$

die Bedingung, unter der die Curven sich rechtwinklig schneiden. Dies angenommen reducirt sich die Gleichung auf

$$(e+2fk+gk^2)(E+2Fk'+Gk'^2)+(e+2fk'+gk'^2)(E+2Fk+Gk^2)$$
$$= (eG-2fF+gE)(k-k')^2 \tag{34}$$

Da hierin E, F, G noch beliebige Grössen sind, so setzen wir

$$E=e; \quad F=f; \quad G=g$$

dann kommt:

$$(e+2fk+gk^2)(e+2fk'+gk'^2) = t^2(k-k')^2 \tag{35}$$

Die vorige Gleichung durch diese dividirt giebt:

$$\frac{E+2Fk+Gk^2}{e+2fk+gk^2}+\frac{E+2Fk'+Gk'^2}{e+2fk'+gk'^2}=\frac{eG-2fF+gE}{t^2}$$

worin noch immer E, F, G beliebige Grössen sind. Erteilt man ihnen ihre Bedeutung (17), so drücken nach (31) die 2 Terme zur Linken die Krümmungen der 2 Normalschnitte für die Richtungen der Tangenten der 2 genannten Curven aus. Bezeichnen also ϱ, ϱ' die Krümmungsradien zweier sich rechtwinklig schneidenden Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{eG-2fF+gE}{t^2} \tag{36}$$

Da die Rechte unabhängig von $\frac{\partial v}{\partial u}$ ist, so hat man den Satz:

S. 2. Die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidenden Normalschnitte ist für den bestimmten Schnittpunkt constant.

§. 9. **Hauptkrümmungen.** Der Ausdruck (31) von $\frac{1}{\varrho}$ variirt nur mit u, v und $\frac{\partial v}{\partial u}=k$, also für einen festen Punkt (uv) nur mit k, indem die Normalschnittsebene um die Normale rotirt. Differentiirt man unter dieser Voraussetzung Gl. (31) nach k, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=\frac{1}{N}\begin{vmatrix} F+Gk & E+2Fk+Gk^2 \\ f+gk & e+2fk+gk^2 \end{vmatrix}$$
$$=-\frac{1}{N}\left\{\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix}k+\begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix}k^2\right\} \tag{37}$$

wo zur Abkürzung

$$N=\tfrac{1}{2}(e+2fk+gk^2)^2$$

gesetzt ist. Verschwindet dieser Ausdruck für jedes k, so ist $\frac{1}{\varrho}$ constant, ein Fall den wir später betrachten. Verschwindet er nur für bestimmte Werte von k, so entsprechen diesen ein Maximum und ein

Minimum von $\frac{1}{\varrho}$; denn, wenn nicht alle Krümmungen gleich sind, so muss bei einer vollen Umdrehung mindestens eine ein Maximum und eine ein Minimum sein, daher muss die quadratische Gleichung, welche k bestimmt, nämlich

$$\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} k^2 = 0 \tag{38}$$

immer 2 reelle ungleiche Wurzeln haben, deren eine der Maximal-, die andere der Minimalkrümmung entspricht. Die 2, durch diese Wurzelwerte bestimmten Normalschnitte heissen die Hauptnormalschnitte, ihre Krümmungen die Hauptkrümmungen, ihre Ebenen die Hauptnormalebenen, ihre Tangenten die Hauptkrümmungstangenten, und deren Richtungen die Hauptkrümmungsrichtungen.

Sind k_1, k_2 die Wurzeln der Gl. (38), so wird

$$\begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} = M; \quad \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} = M(k_1 + k_2); \quad \begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} = M k_1 k_2 \tag{39}$$

woraus durch Verbindung:

$$e + f(k_1 + k_2) + g k_1 k_2 = 0 \tag{40}$$

$$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0 \tag{41}$$

Erstere Gleichung sagt, dass die Hauptkrümmungsrichtungen auf einander senkrecht stehen; die Bedeutung der letztern wird in §. 13. zu Tage kommen. Da sich also die Hauptnormalschnitte rechtwinklig schneiden, so ist nach Gl. (36), wenn ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien bezeichnen:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2} \tag{42}$$

Setzt man ferner in Gl. (33) $k = k_1$, $k' = k_2$, und erst e, f, g für E, F, G, dann umgekehrt E, F, G für e, f, g, so erhält man nach Gl. (40) (41):

$$(e + 2fk_1 + gk_1^2)(e + 2fk_2 + gk_2^2) = t^2(k_1 - k_2)^2 \tag{43}$$

$$(E + 2Fk_1 + Gk_1^2)(E + 2Fk_2 + Gk_2^2) = (EG - F^2)(k_1 - k_2)^2 \tag{44}$$

und nach Division, zufolge (31):

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2} \tag{45}$$

Da jetzt Summe und Product der Hauptkrümmungen bekannt ist, so ergeben sich beide einzeln als Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{t^2}{\varrho^2} - \frac{eG - 2fF + gE}{\varrho} + EG - F^2 = 0 \tag{46}$$

Um jedoch zu finden, welche Wurzel zu k_1, welche zu k_2 gehört, untersuchen wir direct die Differenz beider

$$\varDelta = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$$

Nach Gl. (31) ist sie

$$\varDelta = \frac{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}{e + 2fk_1 + gk_1^2} - \frac{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}{e + 2fk_2 + gk_2^2}$$

Dies multiplicirt mit dem aus (43) bekannten Product beider Nenner giebt:

$$\varDelta t^2 (k_1 - k_2)^2 = \begin{vmatrix} E + 2Fk_1 + Gk_1^2 & E + 2Fk_2 + Gk_2^2 \\ e + 2fk_1 + gk_1^2 & e + 2fk_2 + gk_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= (k_1 - k_2) \left\{ -2 \begin{vmatrix} EF \\ ef \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} GE \\ ge \end{vmatrix} (k_1 + k_2) - 2 \begin{vmatrix} FG \\ fg \end{vmatrix} k_1 k_2 \right\}$$

und nach Einführung der Werte (39):

$$\varDelta = \begin{vmatrix} FG \\ fg \end{vmatrix} \frac{k_1 - k_2}{t^2} \tag{47}$$

Die gefundenen Resultate vereinfachen sich, wenn man für E, F, G ihre Werte aus den Gl. (23) (25) substituirt; denn dann wird

$$\begin{vmatrix} EF \\ ef \end{vmatrix} = H_1 t^2; \quad \begin{vmatrix} GE \\ ge \end{vmatrix} = (H - J_1) t^2; \quad \begin{vmatrix} FG \\ fg \end{vmatrix} = -J t^2 \tag{48}$$

und man findet:

$$k_1 + k_2 = \frac{J_1 - H}{J}; \quad k_1 - k_2 = -\frac{\varDelta}{J}; \quad k_1 k_2 = -\frac{H_1}{J} \tag{49}$$

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -H - J_1; \quad \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \varDelta; \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = HJ_1 - JH_1 \tag{50}$$

woraus:

$$k_1 = \frac{-H + J_1 - \varDelta}{2J}; \quad k_2 = \frac{-H + J_1 + \varDelta}{2J} \tag{51}$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{-H - J_1 + \varDelta}{2}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{H + J_1 + \varDelta}{2} \tag{52}$$

$$\varDelta^2 = (H - J_1)^2 + 4JH_1 \tag{53}$$

Die Gleichungen, welche die Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungen bestimmen, lauten jetzt:

$$J k^2 + (H - J_1) k - H_1 = 0 \tag{54}$$

$$\left(\frac{1}{\varrho} + H\right)\left(\frac{1}{\varrho} + J_1\right) = J H_1 \tag{55}$$

§. 10. **Sphärische Krümmung.** Wie anfangs §. 9. erwähnt, wird $\frac{1}{\varrho}$ constant, also die Krümmungen aller Normalschnitte, die durch einen Punkt gehen, einander gleich, wenn Gl. (38) unabhängig von k gilt, wenn also

$$\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} = 0$$

ist, drei Gleichungen die sich auf folgende 2 reduciren:

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \tag{56}$$

Im allgemeinen bestimmen dieselben einen oder einzelne Punkte; ein solcher Punkt heisst ein Nabelpunkt. In besonderen Fällen geben sie nur eine Relation zwischen u und v, bestimmen also eine Linie, Nabellinie. In Nabelpunkten und Nabellinien heisst die Fläche sphärisch gekrümmt. Nach (31) werden die 3 Quotienten $= \frac{1}{\varrho}$; daher ist

$$E = \frac{e}{\varrho}; \quad F = \frac{f}{\varrho}; \quad G = \frac{g}{\varrho} \tag{57}$$

§. 11. **Krümmungsmass.** Zieht man von einem festen Punkte, z. B. dem Anfangspunkte der xyz eine Gerade von der Länge 1 in der Richtung der Normale einer Fläche, so ist der Ort des Endpunkts, dessen Coordinaten also p, q, r sind, eine Kugelfläche vom Radius 1, auf welcher jedem Punkte der Fläche (xyz) ein Punkt der Kugelfläche (pqr) entspricht. Beschreibt nun der Punkt (xyz) den Umfang eines unendlich kleinen Flächenelements $\partial^2 \Omega$, so beschreibt der Punkt (pqr) den Umfang eines unendlichkleinen sphärischen Flächenelements $\partial^2 \omega$. Den Quotienten

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \Omega}$$

nennt man die Krümmung der Fläche, in analogem Sinne wie in der Curventheorie der Quotient $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ die Krümmung der Curve genannt worden ist, nur war es daselbst die Tangente, mit welcher vom Anfangspunkte eine Gerade von der Länge 1 gezogen ward, deren Endpunkt dann auf der Kugel die Curve τ entsprechend der vom Berührungspunkte gleichzeitig durchlaufenen Curve s beschrieb. Ebenso wie dort werden wir auch in der Flächentheorie jede vom

Punkte (pqr) beschriebene Curve die **Indicatrix** der Normale für die von ihrem Fusspunkt gleichzeitig beschriebene Curve nennen.

Um den Wert der so definirten Krümmung zu finden, wenden wir eine der Formeln (9) auf die Kugelfläche an, wo der Grösse t die Grösse t_1 entsprechen möge, während p, q, r auch hier die Richtungscosinus der Normale ausdrücken; dann ist

$$pt_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und nach Einführung der Werte (19)

$$pt_1 = \begin{vmatrix} H\frac{\partial y}{\partial u} + H_1\frac{\partial y}{\partial v} & J\frac{\partial y}{\partial u} + J_1\frac{\partial y}{\partial v} \\ H\frac{\partial z}{\partial u} + H_1\frac{\partial z}{\partial v} & J\frac{\partial z}{\partial u} + J_1\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} HH_1 \\ JJ_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Der letzte Factor ist $= pt$, der erste nach (50) $= \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$, folglich

$$t_1 = \frac{t}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{58}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \Omega} = \frac{t_1 \partial u \partial v}{t \partial u \partial v} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{59}$$

S. 3. **Die Krümmung der Fläche ist also gleich dem Product der Hauptkrümmungen.** Infolge dessen können wir eine Fläche **positiv** oder **negativ gekrümmt** nennen, jenachdem die Hauptkrümmungen gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Der Grenzfall, wo eine Hauptkrümmung null ist, kann entweder auf der ganzen Fläche oder längs einer Linie oder in einem blossen Punkte stattfinden. Im ersten Falle wird durch die Eigenschaft eine besondere Art von Flächen definirt, deren Theorie im 3. Abschnitt behandelt werden wird; im zweiten ist die Linie der Nullkrümmung gewöhnlich die Grenze zwischen zwei entgegengesetzt gekrümmten Teilen einer Fläche.

§. 12. **Reduction der Krümmung eines beliebigen Normalschnitts auf die Hauptkrümmungen.** Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der beliebigen Tangentialrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k$ und der ersten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k_1$, so ist $R - \vartheta$ der Winkel zwischen eben jener und

der zweiten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k_2$. Daher erhält man die Werte von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ aus der Formel (4), wenn man bzhw. $k' = k_1$ und k_2 setzt. Nun hat man vermöge der Gl. (40):

$$e + f(k + k_1) + gkk_1 = (f + gk_1)(k - k_2)$$
$$e + f(k + k_2) + gkk_2 = (f + gk_2)(k - k_1)$$
$$e + 2fk_1 + gk_1^2 = (f + gk_1)(k_1 - k_2)$$
$$e + 2fk_2 + gk_2^2 = -(f + gk_2)(k_1 - k_2)$$

Demnach gehen die genannten Ausdrücke über in

$$\cos^2\vartheta = \frac{f + gk_1}{e + 2fk + gk^2}\,\frac{(k - k_2)^2}{k_1 - k_2}$$

$$\sin^2\vartheta = -\frac{f + gk_2}{e + 2fk + gk^2}\,\frac{(k - k_1)^2}{k_1 - k_2}$$

Ebenso hat man vermöge der Gl. (41):

$$E + 2Fk_1 + Gk_1^2 = (F + Gk_1)(k_1 - k_2)$$
$$E + 2Fk_2 + Gk_2^2 = -(F + Gk_2)(k_1 - k_2)$$

demzufolge die Formel für die Krümmung eines Normalschnitts (31) angewandt auf die Hauptkrümmungen ergiebt:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{F + Gk_1}{f + gk_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{F + Gk_2}{f + gk_2} \tag{60}$$

Aus vorstehenden 4 Ausdrücken setzt sich zusammen:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho_2} = \frac{(F + Gk_1)(k - k_2)^2 - (F + Gk_2)(k - k_1)^2}{(e + 2fk + gk^2)(k_1 - k_2)}$$
$$= \frac{2Fk + Gk^2 - F(k_1 + k_2) - Gk_1k_2}{e + 2fk + gk^2}$$

das ist nach (41) und dann nach (31)

$$= \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2} = \frac{1}{\varrho}.$$

also

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho_2} \tag{61}$$

Auf Grund dieses Resultats kann man die Beziehungen zwischen den Krümmungen der Normalschnitte folgendermassen constructiv darstellen. Denkt man auf der variabeln Tangentialrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k$ eine Strecke R abgeschnitten, so sind R, ϑ die Polarcoordinaten des

Endpunkts P auf der Berührungsebene für den Berührungspunkt M als Anfangspunkt. Lässt man den Punkt P um M als Mittelpunkt einen Kegelschnitt beschreiben, so wird dessen Gleichung

$$1 = \frac{(R\cos\vartheta)^2}{a} + \frac{(R\sin\vartheta)^2}{b}$$

identisch mit Gl. (61), wenn man

$$a = \frac{R^2\varrho_1}{\varrho}; \quad b = \frac{R^2\varrho_2}{\varrho}$$

setzt. Diese Gleichungen kann man entweder durch

$$R^2 = \varrho; \quad a = \varrho_1; \quad b = \varrho_2$$

oder durch

$$R^2 = -\varrho; \quad a = -\varrho_1; \quad b = -\varrho_2$$

erfüllen. Für positive Krümmung, wo ϱ_1, ϱ_2 gleiches Vorzeichen haben, können a und b, weil nie beide negativ sind, nur positiv sein, und ϱ hat dasselbe Vorzeichen. Für negative Krümmung hingegen sind beide Bestimmungen von a, b zulässig. Folglich ist der Ort des Punktes P für positive Krümmung eine Ellipse, für negative eine Verbindung zweier Hyperbeln von gemeinsamen Asymptoten. Unter allen Umständen aber ist der absolute Wert des Krümmungsradius ϱ dargestellt durch das Quadrat des Radiusvectors. Da, im Intervall von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \mathrm{R}$, ϱ von ϱ_1 bis ϱ_2 variirt, so muss $\frac{1}{\varrho}$ im Fall negativer Krümmung einmal null werden und sein Vorzeichen wechseln; dies geschieht, wo der Radiusvector in die Asymptote übergeht. Ist aber die Krümmung des Normalschnitts null, so sind es nach §. 7. die Krümmungen aller Curven von gemeinsamer Tangente gleichfalls. Diese Nullkrümmungsrichtungen, deren in jedem Punkte einer negativ gekrümmten Fläche 2 existiren, nennt man die **asymptotischen** Richtungen. Man findet sie durch Auflösung der Gleichung

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0 \tag{62}$$

nach k.

§. 13. **Variation der Berührungsebene.** Variirt der Berührungspunkt (xyz) der Berührungsebene

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) + r(\zeta - z) = 0$$

beliebig, so erhält man durch Differentiation bei constanten ξ, η, ζ als zweite Gleichung der Coincidenzlinie:

$$\partial p(\xi - x) + \partial q(\eta - y) + \partial r(\zeta - z) = 0$$

Die Coincidenzlinie geht also durch den Punkt (xyz) und ist Tangente der Fläche.

Bezeichnet ν den Drehungswinkel, so ist ihr Richtungscosinus gegen die x Axe:

$$\frac{1}{\partial\nu}\begin{vmatrix} q & \partial q \\ r & \partial r \end{vmatrix} = \frac{H\partial u + J\partial v}{\partial\nu}\begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial u} \\ r & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{H_1\partial u + J_1\partial v}{\partial\nu}\begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial v} \\ r & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und, wenn man für q, r die Werte (9) setzt:

$$= \frac{H\partial u + J\partial v}{t\partial\nu}\begin{vmatrix} e & \frac{\partial x}{\partial u} \\ f & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \frac{H_1\partial u + J_1\partial v}{t\partial\nu}\begin{vmatrix} f & \frac{\partial x}{\partial u} \\ g & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

das ist nach (23) (25):

$$= \frac{1}{t\,\partial\nu}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & E\partial u + F\partial v \\ \frac{\partial x}{\partial v} & F\partial u + G\partial v \end{vmatrix} \tag{63}$$

Nimmt man zur Bestimmung von $\partial\nu$ die Quadratsumme der Analogen, so kommt:

$$\begin{aligned}(t\partial\nu)^2 &= g(E\partial u + F\partial v)^2 - 2f(E\partial u + F\partial v)(F\partial u + G\partial v) \\ &\quad + e(F\partial u + G\partial v)^2 \\ &= (eG - 2fF + gE)(E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\partial v^2) \\ &\quad - (EG - F^2)(e\partial u^2 + 2f\partial u\,\partial v + g\partial v^2) \\ &= t^2\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right\}\partial s^2\end{aligned}$$

also

$$\partial\nu^2 = \left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right\}\partial s^2 \tag{64}$$

Bezeichnet s' eine Curve, deren Tangente die eben bestimmte Coincidenzlinie ist, und werden die Tangentialrichtungen von s (Bahn des Punkts (xyz)) und s' bestimmt durch die Werte $\frac{\partial v}{\partial u} = k$ und k', so lässt sich das Resultat (63) schreiben:

$$\frac{\partial x}{\partial s'} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}k'\right)\frac{\partial u}{\partial s'} = \frac{\partial u}{t\,\partial\nu}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & E + Fk \\ \frac{\partial x}{\partial v} & F + Gk \end{vmatrix} \tag{65}$$

Multiplicirt man einzeln mit $\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$, so giebt die Summe der Analogen:

$$e + fk' = \frac{\partial s'}{t \partial \nu} \begin{vmatrix} e & E + Fk \\ f & F + Gk \end{vmatrix}$$

$$f + gk' = \frac{\partial s'}{t \partial \nu} \begin{vmatrix} f & E + Fk \\ g & F + Gk \end{vmatrix}$$

woraus durch Elimination von $\partial \nu$:

$$E + F(k + k') + Gkk' = 0 \qquad (41)$$

Diese Gleichung zeigt zuerst, dass die Tangenten von s und s' in reciproker Beziehung stehen. Man nennt darum die Coincidenzlinie der Berührungsebene die conjugirte Tangente zu derjenigen, welche die Richtung der Variation des Berührungspunkts bezeichnet; und umgekehrt ist dann letztere die conjugirte Tangente der Coincidenzlinie.

Ferner ist aus §. 9. bekannt, dass die Gl. (41) verbunden mit der folgenden

$$e + f(k + k') + gkk' = 0 \qquad (7)$$

welche Bedingung des rechtwinkligen Durchschnitts von s und s' ist, die Bedingung ausmacht, unter der die Tangenten beider Curven Hauptkrümmungstangenten sind. Hieraus folgt der Satz:

S. 4. Conjugirte Tangenten bilden immer und nur dann rechte Winkel, wenn sie Hauptkrümmungstangenten sind. Oder umgekehrt:

Notwendige und ausreichende Bedingung der Hauptkrümmungsrichtungen ist, dass sie 1) senkrecht auf einander und 2) conjugirt sind.

Gl. (41) differentiirt giebt:

$$(F + Gk)^2 \partial k' = (EG - F^2) \partial k = \frac{t^2 \partial k}{\varrho_1 \varrho_2}$$

daher variiren k und k' auf positiv gekrümmter Fläche in gleichem, auf negativ gekrümmter in entgegengesetztem Sinne. Da aber die conjugirten Tangenten bei Rotation um den Berührungspunkt gleichzeitig in die Hauptkrümmungsrichtungen fallen, so folgt, dass sie von diesen aus auf positiv gekrümmten Flächen, in gleichem Sinne rotirend in verschiedene Quadranten, auf negativ gekrümmten einander entgegen rotirend in denselben Quadranten treten und sich einander begegnen. Letzteres geschieht für $k = k'$, also nach Gl. (41) für

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0 \qquad (62)$$

d. i. nach §. 12. in der asymptotischen Richtung, und man hat den Satz:

S. 5. Die asymptotische Tangentialrichtung ist sich selbst conjugirt.

§. 14. **Variation der Normale.** Die Normale hat denselben Drehungswinkel ν wie die Berührungsebene, und eine gleichgerichtete momentane Rotationsaxe. Es bleibt daher nur ihr Drehpunktsabstand

$$R = -\frac{\partial p\,\partial x + \partial q\,\partial y + \partial r\,\partial z}{\partial \nu^2}$$

und ihre Gleitung längs der momentanen Rotationsaxe

$$\partial Q = \frac{1}{\partial \nu}\begin{vmatrix} p & \partial p & \partial x \\ q & \partial q & \partial y \\ r & \partial r & \partial z \end{vmatrix}$$

zu berechnen. Der Weit des Zählers von R ist bereits nach Gl. (29) bekannt, und vermöge (31) und (64) wird daraus:

$$R = \frac{\partial s^2}{\varrho\,\partial \nu^2} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho} \tag{66}$$

Der Ausdruck von Q aber, entwickelt nach Elementen der dritten Verticalreihe, enthält als Coefficienten die in §. 13. ermittelten Richtungscosinus der Coincidenzlinie der Berührungsebene, so dass

$$\partial Q = \frac{\partial x}{\partial s'}\partial x + \frac{\partial y}{\partial s'}\partial y + \frac{\partial z}{\partial s'}\partial z$$

und nach Einsetzung der Werte (65)

$$\partial Q = \frac{\partial u^2}{t\partial \nu}\begin{vmatrix} e + fk & E + Fk \\ f + gk & F + Gk \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial u^2}{t\partial \nu}\left\{\begin{vmatrix} e & E \\ f & F \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g & G \\ e & E \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} f & F \\ g & G \end{vmatrix} k^2\right\}$$

oder, weil die Klammer nach §. 9. für $k = k_1$ und k_2 verschwindet:

$$\partial Q = \frac{\partial u^2}{t\partial \nu}\begin{vmatrix} f & F \\ g & G \end{vmatrix}(k - k_1)(k - k_2) \tag{67}$$

Hiernach ist die Gleitung constant null und der Drehpunkt Coincidenzpunkt in Nabelpunkten der Fläche, in jedem andern Punkte findet dasselbe statt bei Variation in den Hauptkrümmungsrichtungen. Bei beliebiger Variation stellt ∂Q den normalen Abstand zweier consecutiven Normalen dar.

Die Lage des Drehpunkts, resp. Coincidenzpunkts erhält man als Endpunkt der Strecke R auf dem positiven Arme der Normale abgeschnitten. Coincidenzpunkt wird er zweimal, für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$. Bzhw. wird hier auch $R = \varrho_1$ und ϱ_2. Die Orte der letztern 2 Punkte heissen die Mittelpunktsflächen.

§. 15. **Bedingung eines Normalensystems.** Eine Gerade

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c} = R \tag{68}$$

variire mit 2 Parametern u, v. Für beliebige Variation ist dann

$$\begin{aligned} \partial x &= \partial\alpha + R\partial a + a\partial R \\ \partial y &= \partial\beta + R\partial b + b\partial R \\ \partial z &= \partial\gamma + R\partial c + c\partial R \end{aligned}$$

woraus:

$$a\partial x + b\partial y + c\partial z = a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma + \partial R$$

Soll nun die Gerade Normale einer Fläche, (xyz) ihr Fusspunkt sein, so muss die Linke verschwinden. Dann wird $a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma$ ein Differential, nämlich von $-R$. Die Bedingung ist also:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial\alpha}{\partial u} + b\frac{\partial\beta}{\partial u} + c\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial\alpha}{\partial v} + b\frac{\partial\beta}{\partial v} + c\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)$$

oder:

$$\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial\gamma}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v} \tag{69}$$

Immer und nur dann, wenn diese Gleichung erfüllt ist, ist das System von Geraden (68) ein System von Normalen einer Fläche.

§. 16. **Torsionswinkel einer Curve auf der Fläche.** Bezeichnet, wie in §. 7. Θ den Winkel zwischen der Hauptnormale einer Curve s auf der Fläche und der Flächennormale, ferner a, b, c die Richtungscosinus der Binormale, a_1, b_1, c_1 die der Hauptnormale, so dass

$$\begin{aligned} pa_1 + qb_1 + rc_1 &= \cos\Theta \\ pa + qb + rc &= -\sin\Theta \end{aligned} \tag{70}$$

wird, endlich τ und ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, so hat man:

$$\partial a_1 = a\partial\vartheta - \frac{\partial x}{\partial s}\partial\tau; \quad a_1 = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x}{\partial s}$$

und findet nach Differentiation der Gl. (70):

$$a_1\partial p + b_1\partial q + c_1\partial r - \partial\vartheta\sin\Theta = -\partial\Theta\sin\Theta$$

Setzt man für ∂p, ∂q, ∂r ihre Werte aus (19), so kommt:

$$\partial\vartheta - \partial\Theta = \frac{M(H\partial u + J\partial v) + N(H_1\partial u + J_1\partial v)}{\sin\Theta} \tag{71}$$

wo zur Abkürzung

$$M = a_1\frac{\partial x}{\partial u} + b_1\frac{\partial y}{\partial u} + c_1\frac{\partial z}{\partial u}; \qquad N = a_1\frac{\partial x}{\partial v} + b_1\frac{\partial y}{\partial v} + c_1\frac{\partial z}{\partial v}$$

gesetzt ist. Zur Bestimmung dieser Coefficienten hat man zunächst:

$$M\partial u + N\partial v = a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z = 0 \tag{72}$$

Um eine zweite Bestimmung zu erhalten, lassen wir die Curve s von einer zweiten Curve s' rechtwinklig schneiden. Für erstere sei $\frac{\partial v}{\partial u} = k$, für letztere $= k'$. Die Tangente von s' bildet dann mit der Hauptnormale von s den Winkel $\Theta - \mathrm{R}$, daher ist

$$\sin\Theta = a_1\frac{\partial x}{\partial s'} + b_1\frac{\partial y}{\partial s'} + c_1\frac{\partial z}{\partial s'} = (M + Nk')\frac{\partial u}{\partial s'} \tag{73}$$

Eliminirt man zwischen den 3 Gleichungen

$$e + 2fk + gk^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2$$

$$e + f(k + k') + gkk' = 0$$

$$e + 2fk' + gk'^2 = \left(\frac{\partial s'}{\partial u}\right)^2$$

e und k', so findet man:

$$(f + gk)\frac{\partial s'}{\partial u} = t\frac{\partial s}{\partial u}$$

und, wenn man nur die 2 ersten subtrahirt:

$$(f + gk)(k - k') = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2$$

woraus:

$$\frac{\partial s'}{\partial u} = t(k - k')\frac{\partial u}{\partial s} \tag{74}$$

Jetzt werden die Gl. (72) (73):

$$M + Nk = 0$$

$$M + Nk' = t(k - k')\frac{\partial u}{\partial s}\sin\Theta$$

woraus:

$$M = tk\frac{\partial u}{\partial s}\sin\Theta; \qquad N = -t\frac{\partial u}{\partial s}\sin\Theta$$

und Gl. (71) wird:

$$\partial\vartheta - \partial\Theta = t\frac{\partial u^2}{\partial s}\{Jk^2 + (H - J_1)k - H_1\}$$

das ist nach (54):

$$\partial\vartheta - \partial\Theta = t\frac{\partial u^2}{\partial s}J(k - k_1)(k - k_2)$$

Der Torsionswinkel einer beliebigen Curve auf der Fläche ist also:

$$\vartheta = \Theta + \int^{s} t\frac{\partial u^2}{\partial s}J(k - k_1)(k - k_2) \tag{75}$$

§. 17. **Biegung und Abwickelung.** Variirt eine in Parametern u, v dargestellte Fläche, so betrachten wir den durch die Werte von u, v bestimmten Punkt als beständig denselben, desgleichen eine Linie, wenn sie der Ort identischer Punkte ist, und ein Flächenstück, wenn es identisch begrenzt ist.

Eine Fläche biegen heisst sie so verändern, dass alle begrenzten Linien auf ihr gleiche Länge behalten.

Wird eine Fläche gebogen, so folgt, dass alle begrenzten Flächenstücke, insbesondere die Flächenelemente constanten Inhalt haben.

Eine Fläche auf einer andern abwickeln heisst sie durch Biegung (und Transposition) in letztere übergehen lassen.

Damit also eine Fläche Ω auf einer andern Ω_1 abwickelbar sei, muss jede irgendwie begrenzte Linie s auf ihr, also auch das Quadrat des Linienelements

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2$$

und, da es für willkürliche ∂u, ∂v gilt, auch die Coefficienten e, f, g auf Ω und Ω_1, in denselben Parametern dargestellt, gleichen Wert haben, und umgekehrt; der Satz lautet:

S. 6. Notwendige und ausreichende Bedingung der Abwickelbarkeit ist, dass e, f, g auf beiden Flächen gleich sind.

In diesem Falle ist offenbar auch t und das Flächenelement $t\partial u\partial v$ gemeinsam, desgleichen die Krümmung der Fläche

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2}$$

weil sie nach Gl. (26) in e, f, g darstellbar ist.

Die Aufgabe, alle auf der Fläche Ω_1 abwickelbaren Flächen Ω

zu finden, besteht demnach in der Integration der Gl. (3), worin e, f, g gegeben, d. h. aus Ω_1 zu entwickeln, und x, y, z gesucht sind.

§. 18. **Mittelpunktsflächen.** Die Gleichungen der beiden Mittelpunktsflächen sind nach §. 14.

$$x_1 = x + p\varrho_1; \quad y_1 = y + q\varrho_1; \quad z_1 = z + r\varrho_1$$
$$x_2 = x + p\varrho_2; \quad y_2 = y + q\varrho_2; \quad z_2 = z + r\varrho_2$$

Durch Differentiation gemäss den Formeln (19) erhält man:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = (1 + H\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} + H_1\varrho_1\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}p; \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = J\varrho_1\frac{\partial x}{\partial u} + (1 + J_1\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}p; \quad \text{etc.}$$

Bezeichnet man durch p_1, q_1, r_1, t_1 die Werte von p, q, r, t auf der ersten Mittelpunktsfläche, so findet man durch Anwendung der Formeln (9) auf die vorstehenden Differentialquotienten:

$$p_1 t_1 = \begin{vmatrix} f - F\varrho_1 & \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \\ g - G\varrho_1 & \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \begin{vmatrix} e - E\varrho_1 & \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \\ f - F\varrho_1 & \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}; \quad \text{etc.}$$

Hieraus folgt, dass

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0$$

dass also (S. 7.) Die Normale der Mittelpunktsfläche parallel der Berührungsebene, ihre Berührungsebene parallel der Normale der Urfläche ist.

Die Herleitung anderer Eigenschaften versparen wir, bis durch Einführung geeigneter Parameter die Untersuchung vereinfacht werden kann.

§. 19. **Parallele Flächen.** Trägt man auf der Normale vom Fusspunkt P aus die constante Strecke c ab, so ist der Ort des Endpunkts P' eine Fläche, deren Gleichungen sind:

$$x' = x + pc; \quad y' = y + qc; \quad z' = z + rc$$

woraus nach (19)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= (1 + Hc)\frac{\partial x}{\partial u} + H_1 c\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \text{etc.} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= Jc\frac{\partial x}{\partial u} + (1 + J_1 c)\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

folglich

$$p\partial x' + q\partial y' + r dz' = 0$$

d. h. die Normale der Fläche P ist auch Normale der Fläche P', und beide Flächen haben den constanten normalen Abstand c, sind demnach einander parallel.

Wendet man jetzt die Formeln (9) auf die Fläche P' an, für welche die Grössen p, q, r noch gelten, so findet man:

$$pt' = \begin{vmatrix} 1+Hc & H_1 c \\ Jc & 1+J_1 c \end{vmatrix} pt; \quad \text{etc.}$$

folglich ist

$$t' = \{(1+Hc)(1+J_1 c) - JH_1 c^2\} t$$

oder nach (50)

$$t' = \left(1 - \frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1 - \frac{c}{\varrho_2}\right) t$$

Differentiirt man partiell die Gl. (76) mit Anwendung der Formeln (18), so kommt:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u^2} = A_3 \frac{\partial x}{\partial u} + A_4 \frac{\partial x}{\partial v} + E'p$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} = B_3 \frac{\partial x}{\partial u} + B_4 \frac{\partial x}{\partial v} + F'p$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial v^2} = C_3 \frac{\partial x}{\partial u} + C_4 \frac{\partial x}{\partial v} + G'p$$

wo gemäss den Definitionsgleichungen (17) E', F', G' die Fundamentalgrössen 2. Ordnung für die Fläche P' sind und der gegenwärtigen Rechnung zufolge die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned}
E' &= (1+Hc)E + H_1 cF = \frac{et^2 c}{\varrho_1 \varrho_2} + E\left\{1 - t^2 c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} \\
F' &= (1+Hc)F + H_1 cG = \frac{ft^2 c}{\varrho_1 \varrho_2} + F\left\{1 - t^2 c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} \\
G' &= JcF + (1+J_1 c)G = \frac{gt^2 c}{\varrho_1 \varrho_2} + G\left\{1 - t^2 c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Ferner ist nach (19), angewandt auf beide Flächen

$$\frac{\partial p}{\partial u} = H \frac{\partial x}{\partial u} + H_1 \frac{\partial x}{\partial v} = H' \frac{\partial x'}{\partial u} + H_1' \frac{\partial x'}{\partial v}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = J \frac{\partial x}{\partial u} + J_1 \frac{\partial x}{\partial v} = J' \frac{\partial x'}{\partial u} + J_1' \frac{\partial x'}{\partial v}$$

Multiplicirt man erst mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, und addirt jedesmal die Analogen, so kommt, mit Anwendung von (23) (25):

$$
\begin{aligned}
-E &= H'(e-Ec)+H_1'(f-Fc)\\
-F &= H'(f-Fc)+H_1'(g-Gc)\\
-F &= J'(e-Ec)+J_1'(f-Fc)\\
-G &= J'(f-Fc)+J_1'(g-Gc)
\end{aligned}
$$

woraus, nach umgekehrter Auflösung:

$$
\left.\begin{aligned}
H'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= H+\frac{c}{\varrho_1\varrho_2}\\
H_1'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= H_1\\
J'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= J\\
J_1'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= J_1+\frac{c}{\varrho_1\varrho_2}
\end{aligned}\right\} \tag{79}
$$

Wendet man jetzt die Gl. (50) auf die Flächen P' und P an, so kommt:

$$
\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}-\frac{2c}{\varrho_1\varrho_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho_1'\varrho_2'}\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)^2\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)^2 &= \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{c}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{c^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2}\\
&= \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)
\end{aligned}
$$

oder

$$
\frac{1}{\varrho_1'\varrho_2'}\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)=\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} \tag{80}
$$

und nach Division beider Gleichungen:

$$
\varrho_1'+\varrho_2'=\varrho_1+\varrho_2-2c
$$

Hiermit verbunden Gl. (80) in der Form

$$
\varrho_1'\varrho_2'=(\varrho_1-c)(\varrho_2-c)
$$

giebt:

$$
\varrho_1'=\varrho_1-c;\quad \varrho_2'=\varrho_2-c \tag{81}
$$

S. 8. **Die Hauptkrümmungsradien paralleler Flächen differiren um deren Abstand.**

Ferner ist allgemein

$$\left.\begin{aligned} e &= \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 E \\ J_1 F \end{vmatrix}; \quad f = \varrho_1 \varrho_2 \cdot \begin{vmatrix} E H \\ F J \end{vmatrix} \\ f &= \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 F \\ J_1 G \end{vmatrix}; \quad g = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} F H \\ G J \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Wendėt man diese Formeln auf die Fläche P' an und schreibt die Gl. (79) wie folgt

$$\begin{aligned} H' \varrho_1' \varrho_2' &= H \varrho_1 \varrho_2 + c; \quad H_1' \varrho_1' \varrho_2' = H_1 \varrho_1 \varrho_2 \\ J' \varrho_1' \varrho_2' &= J \varrho_1 \varrho_2; \quad J_1' \varrho_1' \varrho_2' = J_1 \varrho_1 \varrho_2 + c \end{aligned}$$

so wird

$$e' = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 E' \\ J_1 F' \end{vmatrix} - E'c; \quad f' = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} E' H \\ F' J \end{vmatrix} - F'c$$

$$f' = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 F' \\ J_1 G' \end{vmatrix} - F'c; \quad g' = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} F' H \\ G' J \end{vmatrix} - G'c$$

das ist nach (78):

$$\left.\begin{aligned} e' &= e\left(1 - \frac{c^2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) + Ec\{c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\} \\ f' &= f\left(1 - \frac{c^2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) + Fc\{c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\} \\ g' &= g\left(1 - \frac{c^2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) + Gc\{c\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\} \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

§. 20. **Coincidenzpunkte der Parameterlinien.** Jede von beiden Scharen von Parameterlinien kann dreierlei Form haben, entweder bestehen sie ohne Durchschnitt neben einander, oder sie schneiden sich in einem variabeln, oder in einem festen Punkte. Der zweite Fall bringt Verwickelungen in die Rechnung; das System wird alsdann von einer Curve umhüllt, auf deren einer Seite jeder Punkt 2 Wertsystemen $(u\, v)$, auf deren anderer er keinem Wertsysteme entspricht. Im dritten Falle braucht man nur den festen Punkt als Centrum zu betrachten, von dem die Parameterlinien als Strahlen ausgehen ohne es rückwärts zu überschreiten; dann wird wieder jeder Punkt durch ein Wertsystem $(u\, v)$ vertreten.

Die Bedingung eines Durchschnitts consecutiver Parameterlinien (u) ist, dass für irgend welche Variation von u, v zwei consecutive Punkte zusammenfallen, dass also

$$\frac{\partial x}{\partial u} \partial u + \frac{\partial x}{\partial v} \partial v = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial u} \partial u + \frac{\partial y}{\partial v} \partial v = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial u} \partial u + \frac{\partial z}{\partial u} \partial v = 0$$

ist, wo ∂v nicht null sein darf. Die Gleichungen können entweder durch

$$\frac{\partial x}{\partial u}:\frac{\partial y}{\partial u}:\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial v}:\frac{\partial y}{\partial v}:\frac{\partial z}{\partial v}$$

oder durch

$$\frac{\partial x}{\partial v}=0;\quad \frac{\partial y}{\partial v}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=0;\quad du=0$$

erfüllt werden. Im ersten Falle gelangen die Parameterlinien beider Scharen zur Berührung. Solange man also an der Forderung festhält, dass sich beide Scharen stets schneiden sollen, so hat nur der zweite Fall Bedeutung. Die 3 Gleichungen lassen sich in eine zusammenbegreifen:

$$g=0$$

Stellt dieselbe eine Relation zwischen u, v dar, so drückt diese die Einhüllende der Parameterlinien (u) aus. Bestimmt sie hingegen nur einen Punkt, was namentlich dann stattfindet, wenn g nur u enthält, weil der Punkt (xyz) mit v allein nicht variiren kann, so ist dieser das Strahlencentrum.

II. Besondere Linien und Liniensysteme auf Flächen.

§. 21. **Uebergang zu neuen Parametern.** Sind u_1, v_1 Functionen von u, v, und man entwickelt die partiellen Differentialquotienten von x, y, z bezüglich auf u_1, v_1, so erhält man, indem man u_1, v_1 als neue Parameter betrachtet und die darauf bezüglichen Grössen durch den Index 1 unterscheidet, nach Einführung in I. Gl. (3) (17) (9):

$$\left.\begin{aligned}
e &= e_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+2f_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u}+g_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2\\
f &= e_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+f_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)+g_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}\\
g &= e_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2f_1\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v}+g_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
E &= E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+2F_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u}+G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2\\
F &= E_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)+G_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}\\
G &= E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2F_1\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v}+G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$pt = pt_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix} ; \quad \text{etc.}$$

Hiermit ist die Functionsdeterminante und ihre Inverse

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{t}{t_1} ; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u}{\partial v_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} = \frac{t_1}{t} \tag{3}$$

bekannt, und man hat die Inversionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial u} &= \frac{t}{t_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} ; & \frac{\partial u_1}{\partial v} &= -\frac{t}{t_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} &= -\frac{t}{t_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} ; & \frac{\partial v_1}{dv} &= \frac{t}{t_1}\frac{\partial u}{\partial u_1} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Werte wird man in die Gl. (1) (2) einsetzen, wenn man für u, v eine Substitution in u_1, v_1 ausführen und die alten Fundamentalgrössen in den neuen darstellen will. Die Hauptanwendung der Gl. (1) (2) besteht aber darin, dass sie, wenn Liniensysteme von bestimmter Eigenschaft gesucht werden, die Bedingungen darstellen, aus denen man die zugehörigen Parameter u_1, v_1 durch Integration findet, so fern diese Eigenschaft durch Werte von Fundamentalgrössen repräsentirt wird.

§. 22. **Orthogonale Liniensysteme.** Nach §. 1. schneiden sich die Parameterlinien (u) (v) rechtwinklig, wenn

$$f = 0$$

ist. Gilt dies für alle Punkte der Fläche, so ist das System der Parameterlinien ein o r t h o g o n a l e s, das Flächenelement ein Rechteck. Wir nennen dann auch die Parameter o r t h o g o n a l.

Die wichtigsten Vereinfachungen der in I. aufgestellten Formeln, die hier eintreten, sind die folgenden. Man hat:

$$t^2 = eg$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Ep \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2e}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Gp \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= -\frac{E}{e}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{g}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= -\frac{F}{e}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{G}{g}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$4(EG - F^2) + 2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) - \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right\}$$
$$- \frac{1}{e}\left\{\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\} = 0 \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} 2eg\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u}\right) - Eg\frac{\partial e}{\partial v} + F\left(g\frac{\partial e}{\partial u} - e\frac{\partial g}{\partial u}\right) - Ge\frac{\partial e}{\partial v} = 0 \\ 2eg\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - Eg\frac{\partial g}{\partial u} + F\left(e\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial e}{\partial v}\right) - Ge\frac{\partial g}{\partial u} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Beziehungen zwischen rechtwinklig sich kreuzenden Normalschnitten und ihren Krümmungen sind:

$$e + g\,kk' = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{E}{e} + \frac{G}{g} \tag{10}$$

Die Hauptkrümmungen und deren Richtungen werden bestimmt bzhw. durch die Gleichungen:

$$\left(\frac{e}{\varrho} - E\right)\left(\frac{g}{\varrho} - G\right) = F^2 \tag{11}$$

$$\frac{F}{e}k^2 + \left(\frac{E}{e} - \frac{G}{g}\right)k - \frac{F}{g} = 0 \tag{12}$$

Will man von beliebigen Parametern u_1, v_1 zu orthogonalen Parametern übergehen, so kann man, da sich nicht beide durch eine Bedingung bestimmen, die eine Parameterlinienschar (u) beliebig annehmen; dann wird nach (1) der rechtwinklige Schnitt der andern (v) durch die Bedingung bestimmt:

$$e_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + f_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right) + g_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} = 0$$

oder nach (4):

$$\left(e_1\frac{\partial u}{\partial v_1} - f_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\frac{\partial v}{\partial v_1} - \left(f_1\frac{\partial u}{\partial v_1} - g_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\frac{\partial v}{\partial u_1} = 0$$

welche die Integration der Gleichung

$$\left(e_1\frac{\partial u}{\partial v_1} - f_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\partial u_1 + \left(f_1\frac{\partial u}{\partial v_1} - g_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\partial v_1 = 0$$

erfordert. Ist ihr Integral

$$\varphi(u_1, v_1) = \text{const.}$$

so ist

$$v = \varphi(u_1, v_1)$$

§. 23. **Krümmungslinien.** Krümmungslinie heisst auf einer Fläche eine Linie, deren Tangente in jedem Punkte Hauptkrümmungstangente ist. Es wird dazu die Existenz zweier Hauptkrümmungsrichtungen vorausgesetzt. Fehlen dieselben für einen Punkt, wie z. B. in einem Nabelpunkt, so lässt sich dieser noch als Endpunkt derjenigen Krümmungslinien betrachten, welche in unendlicher Nähe die Richtung nach ihm hin verfolgen. Abgesehen von diesen Endpunkten schneiden sich in jedem Punkte der Fläche 2 Krümmungslinien rechtwinklig. Demnach besteht das System der Krümmungslinien einer Fläche aus 2 Scharen, deren eine von den Normalschnitten grösster, die andere kleinster Krümmung berührt wird. Zwei Linien derselben Schar können sich nicht schneiden, ebensowenig eine sich selbst. Ein stetiger Uebergang von Linien einer Schar in die andere ist nur durch das Gleichwerden beider Hauptkrümmungen möglich, kann also nur in Nabelpunkten stattfinden.

Nach I. Gl. (38) ist die Bedingung einer Krümmungslinie:

$$\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial u} + \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 = 0 \tag{13}$$

Hieraus ergeben sich 2 Werte von $\frac{\partial v}{\partial u}$, welche den 2 Scharen entsprechen.

§. 24. **System der Krümmungslinien.** Sollen die Parameterlinien selbst Krümmungslinien sein, so muss die Gl. (13) durch $\partial v = 0$ und durch $\partial u = 0$ erfüllt werden, aber nicht durch jeden andern Wert. Folglich ist hier

$$\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} \gtrless 0$$

Dies ergiebt:

$$f = 0; \quad F = 0$$

Betrachten wir zunächst die unmittelbaren Vereinfachungen, welche eintreten, wenn u, v Parameter der Krümmungslinien sind, so wird die Krümmung eines Normalschnitts:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E\partial u^2 + G\partial v^2}{e\partial u^2 + g\partial v^2} \tag{14}$$

das ist bzhw. für ein constantes v und ein constantes u:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E}{e}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{G}{g} \tag{15}$$

Für beliebig bewegte Normale wird die Gleichung des Drehungswinkels

$$\partial v^2 = \frac{(E\partial u)^2}{e} + \frac{(G\partial v)^2}{g} \tag{16}$$

die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe

$$\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}\partial v - E\frac{\partial x}{\partial v}\partial u}{eg\partial v}; \quad \text{etc.}$$

die Gleitung der Normale längs derselben

$$\partial Q = \left(\frac{G}{g} - \frac{E}{e}\right)\frac{\partial u\,\partial v}{\partial v} \tag{17}$$

Der Torsionswinkel einer beliebigen Curve s

$$\vartheta = \Theta + \int\left(\frac{G}{g} - \frac{E}{e}\right)\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial s} \tag{18}$$

also der einer Krümmungslinie

$$\vartheta = \Theta$$

Von den Differentialformeln §. 22. sind hier bemerkenswert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= -\frac{E}{e}\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= -\frac{G}{g}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

sofern daraus folgt, dass längs den Krümmungslinien

$$\partial p : \partial q : \partial r = \partial x : \partial y : \partial z \tag{20}$$

ist. Diese Eigenschaft ist hinreichend um eine Linie als Krümmungslinie zu bestimmen. Denn, setzt man nur voraus, dass

$$\frac{\partial p}{\partial u} = m\frac{\partial x}{\partial u}; \quad \frac{\partial q}{\partial u} = m\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = m\frac{\partial z}{\partial u}$$

sei, so erhält man nach I. Gl. (19):

$$H_1\frac{\partial x}{\partial v} = (m - H)\frac{\partial x}{\partial u}$$

nebst analogen Gleichungen für y und z, woraus:

$$H_1 f = (m - H)e; \quad H_1 g = (m - H)f$$

oder nach I. Gl. (23):

$$E = me; \quad F = mf$$

Nimmt man jetzt den Parameter v, über den noch zu verfügen bleibt, orthogonal zu u, so folgt:

$$f = 0; \quad F = 0; \quad m = \frac{E}{e}$$

was zu beweisen war.

Die Relationen zwischen den Fundamentalgrössen reduciren sich auf

$$4EG + 2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) - \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} - \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right\} - \frac{1}{e}\left\{\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} - \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\} = 0 \quad (21)$$

$$2\frac{\partial E}{\partial v} = \left(\frac{E}{e} + \frac{G}{g}\right)\frac{\partial e}{\partial v}; \quad 2\frac{\partial G}{\partial u} = \left(\frac{E}{e} + \frac{G}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial u} \quad (22)$$

Hieraus ergeben sich 2 nützliche Formeln. Infolge der Gl. (15) ist

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{e}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{e}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

das ist nach (22):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} &= \frac{1}{2E}\left(1 - \frac{eG}{gE}\right)\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{1}{2E}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial e}{\partial v} \\ &\text{und analog:} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} &= \frac{1}{2G}\left(1 - \frac{gE}{eG}\right)\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2G}\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial g}{\partial u} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Wie schon in §. 14. bemerkt, hat die Normale, bei Variation in einer Hauptkrümmungsrichtung, und bei keiner andern, wofern sie sich nicht parallel bleibt, einen Coincidenzpunkt; demnach erzeugt sie bei Variation längs einer Krümmungslinie, und bei keiner andern, eine abwickelbare Fläche. Auch diese Eigenschaft kann als Definition dienen.

Will man von beliebigen Parametern u_1, v_1 zu Parametern der Krümmungslinien u, v übergehen, so findet man diese durch Integration der zweiten Gl. (1) und der zweiten Gl. (2), wo die linke Seite null ist.

§. 25. **Ableitung des Krümmungsliniensystemes aus der Indicatrix.** Die Aufgabe ein Krümmungsliniensystem zu finden ist leichter, wenn nicht die Fläche, sondern die Indicatrix der Normale (s. §. 11.) gegeben ist. Nach Gl. (19) ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\varrho_1\frac{\partial p}{\partial u}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\varrho_2\frac{\partial p}{\partial v} \quad (24)$$

woraus:

$$x = -\int \left(\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u} \partial u + \varrho_2 \frac{\partial p}{\partial v} \partial v \right) \tag{25}$$

und analog y und z. Hiernach sind die Gleichungen der Fläche bekannt, sobald ϱ_1 und ϱ_2 gefunden sind, vorausgesetzt dass p, q, r in orthogonalen Parametern u, v gegeben sind.

Eliminirt man x zwischen den Gl. (24), so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\varrho_2 \frac{\partial p}{\partial v} \right)$$

nebst 2 Analogen für q und r, deren jede die Folge der beiden übrigen ist, so dass man durch Verbindung nur die 2 unabhängigen erhält:

$$R_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = -(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{\partial R_1}{\partial v}; \qquad R_2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = (\varrho_1 - \varrho_2) \frac{\partial R_2}{\partial u} \tag{26}$$

wo

$$R_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2$$

$$R_2^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$$

bekannte Grössen sind. Eliminirt man einzeln ϱ_2 und ϱ_1, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \frac{\partial \log R_1}{\partial v} &= \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial R_1}{R_1 R_2 \partial v} \\ \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial v} \frac{\partial \log R_2}{\partial u} &= \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\partial R_2}{R_1 R_2 \partial u} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Hat man durch Integration einer von beiden Gleichungen ϱ_1 oder ϱ_2 gefunden, so ergiebt sich bzhw. ϱ_2 oder ϱ_1 ohne neue Integration aus Gl. (26), und dann ist durch (25) die Fläche in Parametern der Krümmungslinien dargestellt. Da die allgemeine Lösung 2 willkürliche Functionen einer Variabeln enthält, so ergiebt sie eine Classe von Flächen, welche durch gemeinsame Indicatrix charakterisirt ist. In analoger Weise ergab sich in der Curventheorie aus der specifischen Gleichung, d. i. aus einer Relation zwischen 2 Indicatricen, eine Classe von Curven. Im gegenwärtigen Falle werden die Dimensionen, welche bei den Curven ganz beliebig angefügt wurden, durch die Krümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 eingeführt.

§. 26. **Orthogonale Flächensysteme.** Ist in jedem Punkte der Schnittlinie zweier Flächen der Winkel zwischen den Normalen beider ein rechter, so heissen die Flächen orthogonal. Schneidet nun eine Flächenschar eine andre, und ist jede Fläche der einen Schar mit

jeder Fläche der andern orthogonal, so bilden beide Scharen ein **einfach orthogonales Flächensystem**. Drei einander schneidende Scharen von Flächen bilden ein **dreifach orthogonales Flächensystem**, wenn je zwei von ihnen ein einfaches bilden, wenn also in jedem Schnittpunkte die Normalen der 3 sich schneidenden Flächen normal zu einander sind.

Variirt nun ein Punkt (xyz) mit 3 Parametern u, v, w, so ist er der Schnittpunkt der 3 Flächen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, sowie der Schnittpunkt der 3 Parameterlinien (u), (v), (w), d. i. der Schnittlinien jener 3 Flächen, Linien in welchen bzhw. (v, w), (w, u), (u, v) constant sind. Die auf die 3 Flächen bezüglichen Bestimmungsgrössen mögen durch dieselben Buchstaben mit den Indices 1, 2, 3 bezeichnet sein.

Wir nehmen zuerst an, dass die 3 Flächenscharen, welche von den genannten 3 Flächen bei Variation von bzhw. u, v, w durchlaufen werden, ein dreifach orthogonales System bilden. Die positiven Richtungen der Normalen seien denen der x, y, z congruent gewählt, so dass

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = +1$$

wird; dann giebt eine dreifache Entwickelung der folgenden Determinante:

$$\varkappa = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \begin{matrix} = \left(p_1 \frac{\partial x}{\partial u} + q_1 \frac{\partial y}{\partial u} + r_1 \frac{\partial z}{\partial u}\right) t_1 \\ = \left(p_2 \frac{\partial x}{\partial v} + q_2 \frac{\partial y}{\partial v} + r_2 \frac{\partial z}{\partial v}\right) t_2 \\ = \left(p_3 \frac{\partial x}{\partial w} + q_3 \frac{\partial y}{\partial w} + r_3 \frac{\partial z}{\partial w}\right) t_3 \end{matrix}$$

und man hat:

$$p_1 \frac{\partial x}{\partial u} + q_1 \frac{\partial y}{\partial u} + r_1 \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\varkappa}{t_1}$$

$$p_2 \frac{\partial x}{\partial u} + q_2 \frac{\partial y}{\partial u} + r_2 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$p_3 \frac{\partial x}{\partial u} + q_3 \frac{\partial y}{\partial u} + r_3 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

woraus, mit nachfolgender Anwendung der Analogie:

$$\left.\begin{array}{lll}
\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\varkappa p_1}{t_1}; & \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\varkappa q_1}{t_1}; & \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\varkappa r_1}{t_1}. \\
\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\varkappa p_2}{t_2}; & \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\varkappa q_2}{t_2}; & \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\varkappa r_2}{t_2} \\
\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\varkappa p_3}{t_3}, & \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\varkappa q_3}{t_3}; & \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\varkappa r_3}{t_3}
\end{array}\right\} \quad (28)$$

und nach Verbindung:

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 0: \quad f_3 = 0 \quad (29)$$

und nach partieller Differentiation:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} \\ &+ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w\,\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial w\,\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial w\,\partial u} \end{aligned} \quad (30)$$

nebst 2 analogen Gleichungen, durch deren Verbindung hervorgeht:

$$0 = -\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial f_3}{\partial w} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial w}\right)$$

Setzt man die Werte (28) ein, so kommt (mit Hinzufügung der 2 analogen Resultate):

$$F_1 = 0; \quad F_2 = 0; \quad F_3 = 0$$

Dies in Verbindung mit (29) zeigt, dass die Parameterlinien (u), (v), (w) sämmtlich Krümmungslinien, und zwar auf je beiden Flächen, die sich darin treffen, sind. Wir haben den Satz:

S. 9. Die, ein dreifach orthogonales System bildenden 3 Flächenscharen schneiden sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien.

Wir sehen jetzt von der ersten Flächenschar ab und nehmen an, dass die Flächen $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ ein einfach orthogonales System bilden, wählen aber auf ersteren die Parameter u, w, auf letzteren u, v orthogonal, während die Parameterlinie (u) beiden gemeinsam bleibt. Erstere Bedingung ist ausgedrückt durch

$$p_2 p_3 + q_2 q_3 + r_2 r_3 = 0 \quad (31)$$

letztere durch

$$f_2 = 0; \quad f_3 = 0$$

Die Tangenten der Parameterlinien (v) und (w) fallen dann bzhw. zusammen mit den Normalen der Flächen $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ d. h. es ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v}:\frac{\partial y}{\partial v}:\frac{\partial z}{\partial v} &= p_2:q_2:r_2\\ \frac{\partial x}{\partial w}:\frac{\partial y}{\partial w}:\frac{\partial z}{\partial w} &= p_3:q_3:r_3\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

woraus nach (31):

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach u ergab oben Gl. (30). Wendet man auf sie die Proportionen (32) an, so erhält man:

$$MF_2+NF_3=0$$

wo

$$M=\frac{1}{p_3}\frac{\partial x}{\partial w};\quad N=\frac{1}{p_2}\frac{\partial x}{\partial v}$$

gesetzt ist. Diese Gleichung zeigt, dass F_2 und F_3 nur gleichzeitig verschwinden können, und man hat den Satz:

S. 10. Ist die Schnittlinie eines einfach orthogonalen Flächensystems Krümmungslinie auf der einen Flächenschar, so ist sie es auch auf der andern.

Sind ferner a, b, c die Richtungscosinus der Tangente der Parameterlinie (u), so ist

$$a=k\frac{\partial x}{\partial u};\quad b=k\frac{\partial y}{\partial u};\quad c=k\frac{\partial z}{\partial u}$$

wo $k=e_3^{-\frac{1}{2}}$, daher

$$\frac{\partial a}{\partial w}=k\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial k}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial w}=NkF_2+\frac{\partial k}{\partial w}f_3$$

das ist $=0$, wenn die Parameter orthogonal und $F_2=0$ ist. Ebenso hat man:

$$\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial a}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial b}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial c}{\partial v}=0$$

Sofern beide Grössen null einander gleich sind, ist nach §. 15. die Bedingung erfüllt, unter welcher die Tangenten an die Parameterlinien (u) Normalen einer Fläche sind, und man hat den Satz:

S. 11. Wird eine Flächenschar von einer andern längs ihrer Krümmungslinien orthogonal geschnitten, so lassen sich beide von einer dritten Flächenschar orthogonal schneiden.

§. 27. **Mittelpunktsflächen in Beziehung zu den Krümmungslinien.** Differentiirt man die Gleichungen der ersten Mittelpunktsfläche (§. 18.) partiell nach den Formeln (5) und (19), so kommt:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} p; \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial e}{\partial v}\frac{p}{2E}\right) \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u^2} p \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u \partial v} p \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = -\frac{1}{2e}\frac{\partial g}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + C'\frac{\partial x}{\partial v} + C'' p$$

wo C', C'' nicht in Anwendung kommen. Hieraus ergiebt sich:

$$p_1 t_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial v} \\ r & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{g}{t}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}$$

nebst 2 analogen Gleichungen, denen zufolge

$$t_1 = \sqrt{g}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \tag{35}$$

$$p_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u}; \quad q_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad r_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Die Fundamentalgrössen der Mittelpunktsfläche werden ihrer Definition gemäss:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2; \quad f_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{2E}\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ g_1 &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2\left\{g + \left(\frac{1}{2E}\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\} = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 + g\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$E_1 = -\frac{\sqrt{e}}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}; \quad F_1 = 0; \quad G_1 = \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{\partial g}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \tag{37}$$

Die Richtungscosinus der Tangente der Parameterlinie (u) auf der Mittelpunktsfläche sind:

$$\frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial x_1}{\partial u} = p; \quad \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial y_1}{\partial u} = q; \quad \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial z_1}{\partial u} = r$$

Dies längs derselben Linie s_1 differentiirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\sqrt{e}}{\varrho_1}p_1; \quad \text{etc.}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Hauptnormale von s_1 mit der Flächennormale zusammenfällt. Hieraus folgt, dass die Binormale von s_1 der Tangente der Parameterlinie (v) parallel, und die Krümmung von s_1 die des berührenden Normalschnittes ist.

Ferner ist

$$\partial s_1 = \sqrt{e_1}\partial u = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\partial u \quad \text{also}$$

$$s_1 = \varrho_1 + \text{const.} \tag{38}$$

Man kann daher die Gleichungen der ersten Mittelpunktsfläche (§. 18.) auch schreiben:

$$x = x_1 - (s_1 - \text{const.})\frac{\partial x_1}{\partial s_1}; \quad \text{etc.}$$

Demzufolge ist die Krümmungslinie (u) die Evolvente der Curve s_1 Die Hauptresultate sind folgende.

S. 12. Jeder Krümmungslinie auf der Urfläche entspricht ihre Evolute auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche.

S. 13. Die Tangente der Krümmungslinie ist parallel der Normale der Mittelpunktsfläche, die ihrer Evolute parallel der Normale der Urfläche.

S. 14. Die Hauptnormale der Evolute ist Normale der Mittelpunktsfläche.

§. 28. **Asymptotische Linien.** Durch jeden Punkt einer negativ gekrümmten Fläche gehen 2 Normalschnitte, deren Krümmung in diesem Punkte null ist. Asymptotische Linien heissen dann diejenigen Linien auf der Fläche, welche in jedem Punkte einen Normalschnitt von Nullkrümmung berühren. Hiernach schneiden sich in jedem Punkte der negativ gekrümmten Fläche 2 asymptotische Linien.

Wendet man den Meusnier'schen Satz, nach welchem

$$\frac{\partial \tau}{\partial s}\cos\Theta = \frac{1}{\varrho}$$

ist, auf die asymptotischen Linien an, so ist hier $\frac{1}{\varrho}$, folglich entweder $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ oder $\cos\Theta$ durchweg null, das heisst:

S. 15. **Eine asymptotische Linie ist entweder gerade, oder ihre Hauptnormale, mithin auch ihre Schmiegungsebene berühren die Fläche.**

Die Bedingung einer asymptotischen Linie ist zufolge I. Gl. (62):

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\partial v^2 = 0 \tag{39}$$

Sollen die Parameterlinien (u), (v) asymptotische Linien sein, so wird die Bedingung

$$E = 0, \quad G = 0$$

Demnach treten in manchen Formeln grosse Vereinfachungen ein. Insbesondere gehen in §. 5. 6. die Gl. (19) (27) (28) über in

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{F}{t^2}\left(f\frac{\partial x}{\partial u} - e\frac{\partial x}{\partial v}\right); \quad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{F}{t^2}\left(f\frac{\partial x}{\partial v} - g\frac{\partial x}{\partial u}\right) \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{t^2}{F}\frac{\partial F}{\partial u} &= f\left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \tfrac{1}{2}\left(g\frac{\partial e}{\partial u} - e\frac{\partial g}{\partial u}\right) \\ \frac{t^2}{F}\frac{\partial F}{\partial v} &= f\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial e}{\partial v}\right) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die Krümmung eines Normalschnitts wird

$$\frac{1}{\varrho} = 2F\frac{\partial u\,\partial v}{\partial s^2} \tag{42}$$

die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidenden Normalschnitte

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = -\frac{2fF}{t^2} \tag{43}$$

das Product der Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{F^2}{t^2} \tag{44}$$

die einzelnen Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\sqrt{eg} - f}{t^2}F; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{\sqrt{eg} + f}{t^2}F \tag{45}$$

die Hauptkrümmungsrichtungen

$$\sqrt{e}\,\partial u = \sqrt{g}\,\partial v; \quad \sqrt{e}\,\partial u = -\sqrt{g}\,\partial v \tag{46}$$

Die Beziehung zwischen conjugirten Tangenten, für welche $\frac{\partial v}{\partial u}$ einzeln die Werte k und k' hat, ist hier

$$k + k' = 0$$

Der Drehungswinkel ν der Normale bei beliebiger Variation wird hier bestimmt durch

$$\partial \nu^2 = \frac{F^2}{t^2}(e\,\partial u^2 - 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2) \tag{47}$$

ihr Drehpunktsabstand vom Punkte (xyz) ist

$$R = \frac{2}{F}\,\frac{t^2\,\partial u\,\partial v}{e\,\partial u^2 - 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2} \tag{48}$$

ihre Gleitung längs der momentanen Rotationsaxe, deren Richtung durch $\partial v = -k\,\partial u$ ausgedrückt wird, oder der kürzeste Abstand consecutiver Normalen ist

$$\partial Q = \frac{e\,\partial u^2 - g\,\partial v^2}{\sqrt{e\,\partial u^2 - 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2}} \tag{49}$$

Der Torsionswinkel einer Curve s wird hier

$$\vartheta = \Theta + \int^s \frac{F}{t}\,\frac{e\,\partial u^2 - g\,\partial v^2}{\partial s} \tag{50}$$

Die asymptotischen Linien werden am leichtesten aus den Krümmungslinien, und diese am leichtesten aus jenen gefunden. Bezeichnet der Index 1 die Zugehörigkeit zu den Krümmungslinien, so ist in den Gl. (2) $E = 0$; $G = 0$; $F_1 = 0$ zu setzen; man hat also zunächst:

$$\left.\begin{aligned} E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 = 0; \quad E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 = 0 \\ E_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\,\frac{\partial u_1}{\partial v} + G_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\,\frac{\partial v_1}{\partial v} = F \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

was auf die Gl. (39) führt, die hier lautet:

$$E_1\,\partial u_1^2 + G_1\,\partial v_1^2 = 0$$

Wendet man statt dessen die Gl. (2) mit vertauschten Parametern an, so lauten sie:

$$\left.\begin{aligned} 2F\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial u_1} = E_1; \quad 2F\frac{\partial u}{\partial v_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} = G_1 \\ \frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial v}{\partial u_1}\,\frac{\partial u}{\partial v_1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

§. 29. **Kürzeste Linien.** Ist s eine variabele Verbindungslinie zweier festen Punkte auf der Fläche, und bezeichnet δs die Variation ihrer Länge, so nimmt die Länge von irgend einem momentanen Werte s an momentan zu oder ab, jenachdem δs positiv oder negativ ist. Bei derselben Variation in umgekehrtem Verlaufe muss also bzhw. s von demselben momentanen Werte an momentan ab- oder zunehmen. Solange daher δs positiv oder negativ ist, kann s in entgegengesetztem Sinne variiren, mithin ist der momentane Wert nicht der kleinste. Folglich ist notwendige Bedingung einer kürzesten Verbindung zweier Punkte:

$$\delta s = 0$$

Stellt man s als Integral zwischen constanten Grenzen dar, so lautet die Gleichung:

$$\delta \int \partial s = \int \delta \partial s = 0$$

Aus der Gleichung $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$ findet man:

$$\partial s \, \delta \partial s = \partial x \, \delta \partial x + \partial y \, \delta \partial y + \partial z \, \delta \partial z$$

Ausserdem hat man:

$$\partial \left(\frac{\partial x}{\partial s} \delta x + \frac{\partial y}{\partial s} \delta y + \frac{\partial z}{\partial s} \delta z \right) = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \delta z \right) \partial s$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial s} \delta \partial x + \frac{\partial y}{\partial s} \delta \partial y + \frac{\partial z}{\partial s} \delta \partial z$$

Integrirt man dies zwischen den Endpunkten von s, so verschwindet das Integral der Linken, weil x, y, z in den Endpunkten unveränderlich sind, desgleichen das Integral der Summe der 3 letzten Terme, d. i. der Grösse $\delta \partial s$ der Bedingung gemäss, und es bleibt:

$$\int \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \delta z \right) \partial s = 0$$

Die Bedingung, unter der die Linie auf der Fläche liegt, lautet:

$$p \delta x + q \delta y + r \delta z = 0$$

Multiplicirt man sie mit $\lambda \partial s$, integrirt zwischen denselben Grenzen und subtrahirt von der vorigen Gleichung, so kommt:

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \lambda p \right) \delta x + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \lambda q \right) \delta y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \lambda r \right) \delta z \right\} \partial s = 0$$

Macht man einen der 3 binomischen Coefficienten, z. B. den von δz durch Bestimmung von λ zu null, so enthält das Integral nur die 2 unabhängig variabelen δx, δy; damit es also bei jeder Variation verschwinde, muss

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \lambda p; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \lambda q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \lambda r$$

sein. Da die linken Seiten sich verhalten wie die Richtungscosinus der Hauptnormale von s, so hat man den Satz

S. 16. Die Hauptnormale einer kürzesten Linie fällt zusammen mit der Normale der Fläche.

Offenbar ist jedes Stück einer kürzesten Linie auch kürzeste Linie zwischen seinen Endpunkten; folglich ist die Eigenschaft einer Kürzesten unabhängig von den Endpunkten.

Ferner bestimmt die Eigenschaft S. 16. eine Classe von Curven auf der Fläche. Denn diesem Satze zufolge sind die Richtungscosinus der Hauptnormale gegebene Functionen von (u, v), also bleibt nach Elimination von u, v eine Relation zwischen ihnen übrig. In der Curventheorie (Bd. 56. S. 59. Aufg. 3.) ist gezeigt, dass durch eine solche eine Schar von Curven bestimmt wird, deren jede eine besondere Tangente hat. Ist also ein Punkt und in diesem die Tangentialrichtung gegeben, so ist die Curve bestimmt.

Wir betrachten nun die Kürzesten als definirt durch die Eigenschaft S. 16., dann gehen durch jeden Punkt der Fläche Kürzeste in allen Tangentialrichtungen. Dies gestattet einige unmittelbare Anwendungen auf das Frühere.

Der in §. 7. eingeführte Winkel Θ ist bei einer Kürzesten null; daher ist ihre Krümmung gleich der des berührenden Normalschnitts, ihre Schmiegungsebene dessen Ebene, ihre Binormale Tangente der Fläche.

Nach S. 14. entspricht einer Krümmungslinie auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche eine Linie von der Eigenschaft S. 16. Wir können daher jenen Satz so aussprechen:

S. 16. Die Evolute der Krümmungslinie ist Kürzeste auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche.

§. 30. **Orthogonal geodätische Liniensysteme.** Es seien jetzt die Parameterlinien (u) eine beliebige Schar Kürzester; dann ist die Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = p; \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = q; \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = r$$

wo τ den Krümmungswinkel bezeichnet, oder, da v constant ist:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau} = p; \text{ etc. oder}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}=p;\text{ etc.}$$

Multiplicirt man mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, so ist die Summe der 3 Analogen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+f\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}=0$$

Wird nun die Schar der Kürzesten von den Parameterlinien (v) rechtwinklig geschnitten, ist also $f=0$, so erhält man, weil $\frac{\partial u}{\partial s}$ nicht null sein kann:

$$\frac{\partial e}{\partial v}=0$$

folglich ist e Function von u allein. Man kann nun für ∂u substituiren $\frac{\partial u}{\sqrt{e}}$; dann wird

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=1$$

und der neue Wert von e ist 1, also

$$t^2=g$$

und die Gleichung für das Linienelement lautet:

$$\partial s^2=\partial u^2+t^2\partial v^2$$

Die Elemente der Parameterlinien (u), (v) sind hiernach ∂u und $t\partial v$; diese sind die Seiten des rechteckigen Flächenelements $t\,\partial u\,\partial v$.

Ein Stück der Parameterlinie (u) zwischen $u=u_0$ und u_1 ist also

$$\int_{u_0}^{u_1}\partial u=u_1-u_0$$

Lässt man diese Linien bei constanten u_0 und u_1 mit v variiren, so bleibt ihre Länge constant, während ihre Endpunkte auf 2 Parameterlinien (v) fortrücken, und misst deren kürzesten normalen Abstand auf der Fläche. Demnach sind die Linien (v), welche die Kürzesten (u) rechtwinklig schneiden, Linien constanten normalen Abstands, und heissen als solche geodätische Parallelen. Das System beider Scharen nennen wir ein orthogonal geodätisches und ebenso die Parameter.

Setzt man bei Annahme orthogonal geodätischer Parameter u, v stets

$$e=1;\quad f=0;\quad g=t^2$$

so werden die Formeln von §. 22.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = Ep; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -t\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Gp\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial u} = -E\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{t^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial p}{\partial v} = -F\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{G}{t^2}\frac{\partial x}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$EG - F^2 = -t\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{F}{t}\frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} = \left(Et + \frac{G}{t}\right)\frac{\partial t}{\partial u} - \frac{F}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Der Torsionswinkel einer Kürzesten wird:

$$\vartheta = \int \frac{F(\partial u^2 - t^2 \partial v^2) + (G - t^2 E)\partial u \partial v}{t\sqrt{\partial u^2 + t^2 \partial v^2}} \tag{57}$$

der Torsionswinkel der Parameterlinie (u):

$$\vartheta = \int \frac{F\partial u}{t} \tag{58}$$

§. 31. **Differentialgleichung der Kürzesten.** Die Parameter seien orthogonal geodätisch. Für eine beliebige Kürzeste s sei $\frac{\partial v}{\partial u} = k$; dann ist

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{1 + t^2 k^2}}$$

oder, wenn man

$$tk = \operatorname{tg}\mu$$

setzt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u}\cos\mu + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\sin\mu}{t}$$

Dies nochmals längs s differentiirt giebt mit Anwendung der Formeln (53):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{p}{\varrho} = Ep\cos^2\mu + 2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Fp\right)\frac{\sin\mu\cos\mu}{t}$$

$$+ \left(-t\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Gp\right)\frac{\sin^2\mu}{t^2} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\sin\mu + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\sin\mu}{t}\right)$$

Multiplicirt man mit $\frac{\partial x}{\partial u}$ und addirt die Analogen, so kommt nach Division durch $\sin^2\mu$:

$$\frac{\partial\mu}{\sin\mu} = -\frac{\partial s}{t}\frac{\partial t}{\partial u} \tag{59}$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch bei Anwendung des Multiplicators $\frac{\partial x}{\partial v}$. Der Multiplicator p giebt nur die allgemein gültige Gleichung I. (31). Folglich vertritt die Gl. (59) alle Bestimmungen. Ihre Anwendung setzt die Kenntniss einer speciellen Schar Kürzester voraus; durch ihre Integration findet man das vollständige System aller Kürzesten auf der Fläche.

§. 32. **Geodätische Polarcoordinaten.** Orthogonal geodätische Liniensysteme können dreierlei Form haben, jenachdem die Schar der Kürzesten ohne Durchschnitt neben einander besteht, oder von einer Curve eingehüllt wird, oder von einem festen Punkte ausgeht. Die Bedingung der 2 letzten Fälle ist nach §. 20., dass g, oder hier t, bzhw. längs einer Curve oder in einem Punkte verschwindet. Im letzten Falle verschwindet t unabhängig von v, also für einen constanten Wert $u = c$ und, nach Substitution von $u + c$ für u, für $u = 0$. Ist letztere Anordnung getroffen, so drückt u den kürzesten Abstand eines beliebigen Punkts vom festen Punkte längs der Fläche, d. i. den geodätischen Radiusvector des erstern aus. Der Winkel, den ein variabeler Radiusvector mit einem festen bildet, ist dann Function von v, lässt sich daher selbst zum Parameter v nehmen. Die Parameterlinien (v) werden concentrische geodätische Kreise mit dem Radius u. Die Länge eines solchen Kreisbogens ist $= \int t\partial v$; für unendlich kleinen Radius, wo der Kreis eben wird, muss er aber $= \int u\,\partial v$ sein. Folglich ist die Bedingung, unter der v jenen Winkel, d. i. das geodätische Azimut, darstellt:

$$\lim\frac{t}{u} = 1 \tag{60}$$

und das Verfahren bei Ermittelung des Parameters folgendes. Man berechne für verschwindendes u

$$f(v) = \lim\frac{t}{u} \quad \text{und}$$

$$v' = \int f(v)\,\partial v$$

dann entspricht den Parametern u, v' der Wert

$$t' = \frac{t}{f(v)}$$

daher ist

$$\lim \frac{t'}{u} = \frac{1}{f(v)} \lim \frac{t}{u} = 1$$

folglich ist v' der gesuchte Parameter.

§. 33. **Conforme Abbildung der Flächen auf der Ebene.** Eine Fläche wird als Abbildung einer andern betrachtet, wenn man nach irgend einem Gesetze jedem Punkte der einen einen bestimmten Punkt der andern entsprechen lässt. Die entsprechenden Punkte und die von ihnen entsprechend erzeugten Linien heissen dann die Abbildungen von einander. So ist z. B. die Indicatrix der Normale die Abbildung derjenigen Curve auf der Kugel, welche der Fusspunkt durchläuft; das Gesetz ist hier die gleiche Richtung der Normalen. Analytisch ausgedrückt wird die Abbildung, indem man beide Flächen in denselben Parametern darstellt, so dass die Punkte (uv) sich auf beiden entsprechen.

Das Gesetz der conformen Abbildung ist die Aehnlichkeit der Flächenelemente. Alle Elemente der einen Fläche sind den entsprechenden der andern ähnlich, wenn die von jedem Punkte ausgehenden Linienelemente

$$\sqrt{e\partial u^2 + 2f\partial u\,\partial v + g\partial v^2}$$

auf der einen den entsprechenden

$$\sqrt{e'\partial u^2 + 2f'\partial u\,\partial v + g'\partial v^2}$$

auf der andern proportional sind, wenn also

$$e:f:g = e':f':g'$$

ist.

Das Problem der conformen Abbildung besteht also ursprünglich in folgendem. Zwei Flächen, Φ und Φ'', sind jede in besondern Parametern (u, v) und (u'', v'') gegeben, wodurch (e, f, g) und (e'', f'', g'') bekannt sind. Die Parameter der einen, welcher man will, z. B. u, v, kann man beibehalten. Dann soll man gemäss den Gl. (1), angewandt auf Φ'', von den Parametern (u'', v'') auf die Parameter (u', v') übergehen, wo

$$e' = me; \quad f' = mf; \quad g' = mg \tag{61}$$

zu setzen ist, so dass nach Elimination von m zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung von u', v' als Functionen von u'', v'' zu integriren bleiben. Ist dies geschehen, so hat man:

$$u' = u; \quad v' = v$$

Das Problem lässt sich aber in 2 einfachere zerlegen. Man kann erst die Fläche Φ auf der Ebene, dann diese auf der Fläche Φ'' abbilden. Da überdies ein Parameterpar willkürlich ist, so nehmen wir auf der Ebene cartesische Coordinaten u, v zu Parametern. Dann handelt es sich nur noch um folgendes Problem. Eine Fläche ist in beliebigen Parametern gegeben; man soll diejenigen Parameter finden, welche bei conformer Abbildung auf der Ebene in cartesische Coordinaten übergehen. Den cartesischen Coordinaten als Parameter der Ebene entsprechen die Fundamentalgrössen

$$e' = 1; \quad f' = 0; \quad g' = 1$$

daher ist nach (61) die Bedingung:

$$e = g; \quad f = 0$$

Hiermit sind wir zu einem neuen Liniensystem gelangt, das wir abkürzend das Abbildungsliniensystem nennen können. Die Parameter heissen dann Abbildungsparameter. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die das System bildenden Linien, jede für sich, ganz beliebige Linien sind, und nur ihr System die besondere Eigenschaft besitzt. Das System ist bestimmt, sobald man auf der Fläche 2 sich rechtwinklig schneidende, sonst beliebige Linien als erste Parameterlinien angenommen hat.

Die Formeln von §. 22. gehen hier, wo das Linienelement

$$\partial s = t\sqrt{\partial u^2 + \partial v^2}$$

ist, in folgende über:

$$t = e = g$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{1}{2t}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + Ep \\
\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2t}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + Fp \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \frac{1}{2t}\left(-\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + Gp
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u} &= -\frac{1}{t}\left(E\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\
\frac{\partial p}{\partial v} &= -\frac{1}{t}\left(F\frac{\partial x}{\partial u} + G\frac{\partial x}{\partial v}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

$$2(EG - F^2) + \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - \frac{1}{t}\left\{\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2\right\} = 0 \tag{64}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}&=\frac{E+G}{2t}\frac{\partial t}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}&=-\frac{E+G}{2t}\frac{\partial t}{\partial u}\end{aligned}\right\}\tag{65}$$

Ein besonderer Fall der conformen Abbildung ist die Abwickelung; hier sind die ähnlichen Flächenelemente congruent.

III. Besondere Arten von Flächen.

§. 34. **Abwickelbare Flächen.** Im folgenden soll von Flächen gehandelt werden, die auf Ebenen abwickelbar sind. Man nennt solche gewöhnlich schlechthin abwickelbare Flächen.

Betrachtet man die Ebene der xy als die Fläche, auf welcher die Abwickelung geschieht, und nimmt die cartesischen Coordinaten $x=u$, $y=v$ zu Parametern, so wird

$$\partial s^2=\partial x^2+\partial y^2=\partial u^2+\partial v^2$$

also

$$e=1;\quad f=0;\quad g=1;\quad t=1\tag{1}$$

Ferner werden auf jener Ebene $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, etc. null, daher

$$E=0;\quad F=0;\quad G=0$$

woraus:

$$EG-F^2=0\tag{2}$$

Nach §. 17. müssen die Gl. (1) (2) auch für die auf der Ebene abwickelbaren Flächen gelten; folglich ist hier

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{EG-F^2}{t^2}=0$$

Hiernach ist immer eine von beiden Hauptkrümmungen null; wir setzen:

$$\frac{1}{\varrho_1}=0$$

Ist aber die Krümmung eines Normalschnitts null, so ist es nach §. 7. auch die Krümmung jeder denselben berührenden Curve, in unserm Falle also auch die Krümmung der ersten Krümmungslinie, und zwar in ihrer ganzen Ausdehnung, weil Gl. (2) für alle Punkte gilt; d. h. die erste Krümmungslinie ist gerade, und man hat den Satz:

S. 18. Jede Abwickelbare wird von einer Geraden erzeugt, und diese ist Krümmungslinie auf ihr.

Ferner hat eine Normale, welche längs einer Krümmungslinie gleitet, nach §. 25. entweder constante Richtung oder einen Coincidenzpunkt. Das letztere ist bei der geraden Krümmungslinie nicht möglich, weil sie selbst den kürzesten Abstand der consecutiven Normalen misst. Folglich ist die Richtung der Normale constant. Hieraus folgt weiter, dass die Fläche längs der geraden Krümmungslinie eine einzige Berührungsebene hat. Variirt dann der Punkt (xyz) transversal, so kann die Berührungsebene nur um die gerade Krümmungslinie rotiren; diese bildet dann ihre Coincidenzlinie und hat entweder constante Richtung oder einen Coincidenzpunkt. In beiden Fällen ist die Urfläche Einhüllende einer mit einem Parameter variirenden Ebene, und zwar kann sie als solche dreierlei Form haben: jenachdem die gerade Krümmungslinie constante Richtung oder einen festen oder einen variabeln Coincidenzpunkt hat, ist die Fläche cylindrisch, konisch oder Tangentenfläche.

§. 35. **Tangentenfläche.** Die Gerade

$$x = \alpha + au; \quad y = \beta + bu; \quad z = \gamma + cu \tag{3}$$

variire mit v; dann hat sie einen Coincidenzpunkt, wenn

$$\begin{vmatrix} a & \partial a & \partial \alpha \\ b & \partial b & \partial \beta \\ c & \partial c & \partial \gamma \end{vmatrix} = 0$$

ist. Wenn wie wir annehmen nicht a, b, c constant sind, so ist die Gleichung identisch mit den dreien:

$$\partial \alpha = a\partial\lambda + \mu\partial a; \quad \partial\beta = b\partial\lambda + \mu\partial b; \quad \partial\gamma = c\partial\lambda + \mu\partial c$$

woraus:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = a\frac{\partial\lambda}{\partial v} + (\mu + u)\frac{\partial a}{\partial v}; \quad \text{etc.} \tag{4}$$

Sind a, b, c die Richtungscosinus der Geraden, so findet man nach I. Gl. (3):

$$e = 1; \quad f = \frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

Sollen die Parameter u, v der erzeugten Fläche orthogonal sein, so hat man $\partial\lambda = 0$ zu setzen, und erhält:

$$\partial\alpha = \mu\partial a; \quad \partial\beta = \mu\partial b; \quad \partial\gamma = \mu\partial c \tag{5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (\mu + u)\frac{\partial a}{\partial v}; \quad \text{etc.} \tag{6}$$

Der Drehungswinkel der Erzeugenden ist Function von v; daher können wir ihn $= v$ setzen; dann wird

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 \tag{7}$$

folglich

$$e = 1;\quad f = 0;\quad g = (\mu + u)^2;\quad t = \mu + u \tag{8}$$

Es zeigt sich, dass die Parameter orthogonal geodätisch sind.

Ferner findet man:

$$pt = (\mu + u) \begin{vmatrix} b & \frac{\partial b}{\partial v} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix};\quad \text{etc.}$$

woraus:

$$p = \begin{vmatrix} b & \frac{\partial b}{\partial v} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix};\quad \text{etc.} \tag{9}$$

Eine zweite Differentiation der Gl. (4) (6) giebt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0;\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial a}{\partial v};\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = (\mu + u)\frac{\partial^2 a}{\partial v^2} + \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial v}$$

woraus:

$$E = 0;\quad F = 0;\quad G = (\mu + u) V \tag{10}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$V = \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial^2 a}{\partial v^2} \\ b & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} \end{vmatrix} \tag{11}$$

setzen. Demnach sind die Parameterlinien auch Krümmungslinien; daher die Hauptkrümmungen:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E}{e} = 0;\qquad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{G}{g} = \frac{V}{\mu + u} \tag{12}$$

Der Drehpunktsabstand der Erzeugenden ist

$$-\frac{\partial a \partial \alpha + \partial b \partial \beta + \partial c \partial \gamma}{\partial v^2} = -\mu$$

folglich sind die Coordinaten des Coincidenzpunkts:

$$x_0 = \alpha - \mu a; \quad y_0 = \beta - \mu b; \quad z_0 = \gamma - \mu c$$

oder

$$x_0 = \int \mu \partial a - \mu a = -\int a \partial \mu; \quad \text{etc.}$$

Dieser erzeugt bei Variation von v, wofern er mit variirt, die Einhüllende der Geraden (3), die Gratlinie s_0 der Abwickelbaren, und zwar ist

$$\partial x_0 = -a\partial\mu; \quad \partial s_0 = -\partial\mu; \quad \frac{\partial x_0}{\partial s_0} = a$$

also

$$\alpha = x_0 + \mu a = x_0 - s_0 \frac{\partial x_0}{\partial s_0}$$

Dies eingeführt in (3) giebt:

$$x = x_0 + (u - s_0)\frac{\partial x_0}{\partial s_0}; \quad \text{etc.} \tag{13}$$

das ist für constantes u die Gleichung einer Evolvente von s_0, für constantes v die der Tangente. Es hat sich ergeben:

S. 19. Die Krümmungslinien einer Tangentenfläche sind die Tangente und die Evolvente ihrer Gratlinie. Dieselben sind zugleich orthogonal geodätische Parameterlinien.

Ferner ersieht man aus (7) (4) (9) (11), dass v der Krümmungswinkel, a, b, c die Richtungscosinus der Tangente, $\frac{\partial a}{\partial v}$, $\frac{\partial b}{\partial v}$, $\frac{\partial c}{\partial v}$ die der Hauptnormale, p, q, r die der Binormale, V das Krümmungsverhältniss, also $\int V\partial v$ der Torsionswinkel der Gratlinie ist. Geht man also von der beliebigen Curve s_0 aus, und lässt deren Tangente die Abwickelbare erzeugen, so folgen die Bestimmungsstücke der Fläche unmittelbar aus denen der Curve.

§. 36. **Abwickelung der Tangentenfläche.** Um die Tangentenfläche auf der Ebene abzuwickeln, haben wir nur diejenigen Parameter u_1, v_1 zu suchen, welche nach Abwickelung in ebene cartesische Coordinaten übergehen. Nach (1) entsprechen diesen die Werte:

$$e_1 = g_1 = t_1 = 1; \quad f_1 = 0 \tag{14}$$

Gehen wir also von den Werten (8) aus, so werden die Transformationsformeln II. Gl. (1):

$$1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$(\mu + u)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

und lassen sich erfüllen durch

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial u} = \cos\varkappa; \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = (\mu+u)\sin\varkappa \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} = -\sin\varkappa; \quad \frac{\partial v_1}{\partial v} = (\mu+u)\cos\varkappa\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Eliminirt man u_1 und v_1, so kommt:

$$-\frac{\partial\varkappa}{\partial v}\sin\varkappa = \sin\varkappa + (\mu+u)\frac{\partial\varkappa}{\partial u}\cos\varkappa$$

$$-\frac{\partial\varkappa}{\partial v}\cos\varkappa = \cos\varkappa - (\mu+u)\frac{\partial\varkappa}{\partial u}\sin\varkappa$$

woraus:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial v} = -1; \quad \frac{\partial\varkappa}{\partial u} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\varkappa = \delta - v, \quad \text{wo } \delta \text{ constant.}$$

Dies eingeführt in (15) giebt:

$$\begin{aligned}\partial u_1 &= \partial u\cos(\delta-v) + (\mu+u)\,\partial v\sin(\delta-v) \\ \partial v_1 &= -\partial u\sin(\delta-v) + (\mu+u)\,\partial v\cos(\delta-v)\end{aligned}$$

und nach Integration:

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= u\cos(\delta-v) + \int\mu\,\partial v\sin(\delta-v) \\ v_1 &= -u\sin(\delta-v) + \int\mu\,\partial v\cos(\delta-v)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierdurch ist für jeden Punkt (uv) der Tangentenfläche der Punkt $(u_1 v_1)$ auf der Ebene bestimmt.

Dieselben Gleichungen lösen gleichzeitig das Problem der Kürzesten. Denn da die Parameterlinien (u_1) und (v_1) auf der Ebene Gerade, d. i. Kürzeste sind, so sind sie es auch auf der Abwickelbaren; und da jede Gerade auf der Ebene für irgend welche Werte von δ und u_1 mit der Pameterlinie $u_1 =$ const. identisch sein muss, so ist erstlich jede Kürzeste auf der Tangentenfläche durch eine der Gl. (16), und jedes orthogonal geodätische System durch beide Gleichungen dargestellt. Ueberdies ist bemerkenswert, dass hier 2 Scharen Kürzester sich rechtwinklig schneiden, folglich beide auch geodätisch parallel sind, was, wie leicht zu sehen, ausschliesslich Eigenschaft der Abwickelbaren ist, sofern dazu die Gl. (14) erfordert werden.

Die Abwickelung vertritt zugleich die conforme Abbildung.

§. 37. **Konische und cylindrische Fläche.** Ist der Ort der Geraden (3) eine konische Fläche, so sind α, β, γ constant. Nach (5)

ist dann $\mu = 0$; im übrigen bleibt alles, ausgenommen das auf die Curve s_0 Bezügliche, in unveränderter Geltung.

Im Fall einer cylindrischen Fläche, wo a, b, c constant, kann v seine Bedeutung nicht behalten. Setzen wir statt dessen

$$\partial v^2 = \partial \alpha^2 + \partial \beta^2 + \partial \gamma^2$$

so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = 1; \quad t = 1$$

mit der Bedingung

$$a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma = 0 \quad \text{oder}$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \text{const.}$$

welche dadurch zu erfüllen ist, dass man den Ausgangspunkt der Geraden $(\alpha\beta\gamma)$ in ihren Durchschnitt mit einer Ebene normal zu ihr legt. Dann sind u, v die Parameter, welche nach Abwickelung in cartesische Coordinaten übergehen, und zwar bedeutet v einen Bogen der Curve, welche der Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ erzeugt, und welche die Basis der cylindrischen Fläche heisst, und u den normalen Abstand des Punktes (uv) von der Basis. Ferner ist

$$p = pt = \begin{vmatrix} b & \frac{\partial \beta}{\partial v} \\ c & \frac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

$$E = 0; \quad F = 0; \quad G = \begin{vmatrix} a & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} \\ b & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial^2 \beta}{\partial v^2} \\ c & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial^2 \gamma}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Die Determinante entwickelt giebt:

$$G = (al + bm + cn)\frac{\partial \tau}{\partial v}$$

wo τ Krümmungswinkel, l, m, n Richtungscosinus der Binormale der Curve v, also identisch mit a, b, c sind. Daher hat man:

$$G = \frac{G}{g} = \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial \tau}{\partial v}$$

d. h. die zweite Hauptkrümmung ist die Krümmung der Basis.

Die in §. 36. behandelte Aufgabe lässt sich in analoger Weise bei der cylindrischen Fläche durchführen, wo nur 1 statt $\mu + u$ zu schreiben ist, und man findet als allgemeinste Parameter, und zugleich als Gleichungen der Kürzesten und der orthogonal geodätischen Systeme:

$$u_1 = u \cos \varkappa + v \sin \varkappa$$
$$v_1 = - u \sin \varkappa + v \cos \varkappa$$

wo $\varkappa$ constant.

§. 38. **Flächen constanter Krümmung.** Die Krümmung einer Fläche sei constant $= k^2$, so dass k bei negativer Krümmung imaginär zu denken ist. Führt man orthogonal geodätische Parameter u, v ein, so ist nach II. Gl. (55)

$$k^2 = \frac{EG - F^2}{t^2} = -\frac{1}{t} \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + k^2 t = 0$$

Dies integrirt giebt:

$$t = V \cos ku + V_1 \sin ku$$

wo V, V_1 Functionen von v sind. Machen wir nach §. 31. u, v zu geodätischen Polarcoordinaten, so muss für verschwindendes u

$$\lim \frac{t}{u} = 1$$

sein; dies giebt:

$$V = 0; \quad V_1 = \frac{1}{k}$$

und man hat:

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = t^2; \quad t = \frac{\sin ku}{k} \tag{17}$$

Für eine beliebige Curve s auf der Fläche hat man jetzt:

$$\partial s^2 = \partial u^2 + \left(\frac{\sin ku}{k} \partial v \right)^2 \tag{18}$$

Soll nun diese Curve Kürzeste sein, so ist, wie in §. 29. erklärt, die Bedingung:

$$0 = \int \delta \partial s = \frac{1}{k} \int \frac{\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u}}{\sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u} \right)^2}} \partial \delta v$$

Integrirt man teilweise, so wird δv Factor des integrirten Teils. Werden die Endpunkte des Bogens s als fest angenommen, so verschwindet jener Factor an beiden Integralgrenzen, und es bleibt:

$$0 = \int \partial v \, \partial \left(\frac{\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u}}{\sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}} \right)$$

Soll dies bei jeder Variation stattfinden, so muss sein

$$\partial \left(\frac{\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u}}{\sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}} \right) = 0$$

also, wenn c eine Constante bezeichnet,

$$\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u} = \sin kc \sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}$$

woraus:

$$\partial v = \frac{k \sin kc \, \partial u}{\sin ku \sqrt{\sin^2 ku - \sin^2 kc}} \tag{19}$$

Setzt man

$$\cos ku = \cos kc \cos w \tag{20}$$

so wird der Ausdruck:

$$\partial v = \frac{\sin kc \, \partial w}{1 - \cos^2 kc \cos^2 w}$$

und giebt nach Integration:

$$\operatorname{tg} w = \sin kc \operatorname{tg} (v + \beta) \tag{21}$$

Eliminirt man w mittelst (20), so kommt:

$$\operatorname{tg} ku \cos (v + \beta) = \operatorname{tg} kc \tag{22}$$

Eliminirt man, um einen Bogen der Kürzesten zu berechnen, ∂v zwischen (18) und (19), so findet man:

$$\partial s = \frac{\sin ku \, \partial u}{\sqrt{\sin^2 ku - \sin^2 kc}} \tag{23}$$

und nach Integration:

$$\cos ku = \cos kc \cos k (s + b) \tag{24}$$

Dies verglichen mit (20) zeigt, dass

$$w = k (s + b)$$

daher ist nach (21)

$$\operatorname{tg} k (s + b) = \sin kc \operatorname{tg} (v + \beta) \tag{25}$$

und in Verbindung mit (24) (22)

$$\sin k(s+b) = \operatorname{tg} kc \cos ku \operatorname{tg}(v+\beta) \tag{26}$$

$$\sin k(s+b) = \sin ku \sin(v+\beta) \tag{27}$$

Untersucht man noch den Winkel ϑ zwischen 2 Kürzesten s, s', so ist nach I. Gl. (4)

$$\cos\vartheta = \frac{1 + \left(\frac{\sin ku}{k}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial s'}{\partial u}}$$

Geht die zweite Curve vom Punkte $u = 0$ aus, so ist s' identisch mit dem geodätischen Radiusvector u, also

$$\frac{\partial v'}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial s'}{\partial u} = 1$$

Dies giebt:

$$\cos\vartheta = 1 : \frac{\partial s}{\partial u}$$

also vermöge (23):

$$\sin\vartheta = \frac{\sin kc}{\sin ku} \tag{28}$$

Für $u = c$, d. i. nach Gl. (22) für $v = -\beta$, ist daher ϑ ein Rechter. Hieraus erhellt die Bedeutung der Constanten. Der Winkel $v = -\beta$ bestimmt die Richtung, der Bogen c die Länge der geodätischen Normale vom Punkte $u = 0$ auf die Kürzeste s. Was b betrifft, so können wir festsetzen, dass s zugleich mit v verschwindet. Da nun nach (24) für $u = c$ die Grösse $s = -b$ wird, so bezeichnet b das Stück der Kürzesten von $v = -\beta$ bis $v = 0$.

Jetzt bildet u die Hypotenuse, c und $s+b$ die Katheten eines geodätischen rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $v+\beta$ der Gegenwinkel von $s+b$, und ϑ der von c ist. Die Relationen zwischen den ersten 4 Stücken sind:

$$\cos ku = \cos kc \cos k(s+b) \tag{29}$$

$$\sin ku \cos(v+\beta) = \sin kc \cos k(s+b) \tag{30}$$

$$\sin ku \sin(v+\beta) = \sin k(s+b) \tag{31}$$

Bezeichnet a den Wert von u für $v = 0$, so bilden die 3 Kürzesten u, a, s ein beliebiges geodätisches Dreieck. Die Gleichungen gehen für $v = 0$; $s = 0$ über in

$$\left.\begin{aligned} \cos ka &= \cos kc \cos kb \\ \sin ka \cos\beta &= \sin kc \cos kb \\ \sin ka \sin\beta &= \sin kb \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die Gegenwinkel der Seiten a und u sind ϑ und der Nebenwinkel dessen, in welchen ϑ für $v=0$ übergeht. Letzteren durch γ bezeichnet, hat man nach (28):

$$\left.\begin{aligned}\sin\vartheta\sin ku &= \sin kc\\ \sin\gamma\sin ka &= \sin kc\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

Die Gl. (24) (27) (28) bleiben dieselben, wenn man $s+b$ mit c und $v+\beta$ mit ϑ vertauscht. Gl. (30) ist die Folge von (24) und (27), daher besteht sie auch nach jener Vertauschung, und man hat:

$$\sin ku\cos\vartheta = \cos kc\sin k(s+b) \quad \text{und für } v=0$$
$$-\sin ka\cos\gamma = \cos kc\sin kb$$

Eliminirt man die Stücke b, c, β, welche nicht zum Dreieck (usa) gehören, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin ku}{\sin\gamma} &= \frac{\sin ks}{\sin v}\\ \cos ks &= \frac{\cos v+\cos\gamma\cos\vartheta}{\sin\gamma\sin\vartheta}\\ \cos v &= \frac{\cos ks-\cos ka\cos ku}{\sin ka\sin ku}\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

übereinstimmend mit den Relationen, welche an einem Dreieck auf der Kugel vom Radius $\frac{1}{k}$ stattfinden.

§. 39. **Problem der Darstellung der Flächen constanter Krümmung in Coordinaten.** Um die durch die Werte von e, f, g bestimmte Fläche constanter Krümmung in Coordinaten darzustellen, ist das System von Gleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=e=1$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=f=0$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=g=\left(\frac{\sin ku}{k}\right)^2$$

zu integriren. Erfüllt man sie durch die Werte

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\sin\vartheta\sin\mu\cos\lambda-\cos\vartheta\sin\lambda;\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\sin ku}{k}\cos\mu\cos\lambda$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\sin\vartheta\sin\mu\sin\lambda+\cos\vartheta\cos\lambda;\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\sin ku}{k}\cos\mu\sin\lambda$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\sin\vartheta\cos\mu;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\sin ku}{k}\sin\mu$$

und eleminirt durch partielle Differentiation x, y, z, so erhält man 3 Gleichungen, deren erste zwei sich leicht zu zwei einfacheren verbinden lassen, so dass sich ergiebt:

$$\cos\vartheta\left(\sin\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)+\sin\vartheta\cos\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}=-\cos ku\cos\mu+\frac{\sin ku}{k}\sin\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}$$

$$\sin\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+\sin\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)=-\frac{\sin ku}{k}\cos\mu\frac{\partial\lambda}{\partial u} \tag{35}$$

$$\cos\vartheta\cos\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\sin\vartheta\sin\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}=\cos ku\sin\mu+\frac{\sin ku}{k}\cos\mu\frac{\partial\mu}{\partial u} \tag{36}$$

Auch von diesen verbinden sich wieder die erste und dritte zu folgenden zweien:

$$\cos\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+\sin\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)=\frac{\sin ku}{k}\frac{\partial\mu}{\partial u} \tag{37}$$

$$\cos\vartheta\cos\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\sin\vartheta\frac{\partial\mu}{\partial v}=-\cos ku$$

deren erstere mit Gl. (35) ergiebt:

$$\cos\vartheta\cos\mu\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\sin\vartheta\frac{\partial\mu}{\partial u}=0 \tag{38}$$

Die letzten 2 Gleichungen umfasst die folgende:

$$\cos\vartheta\cos\mu\,\partial\lambda+\sin\vartheta\,\partial\mu+\cos ku\,\partial v=0 \tag{39}$$

welche nur noch mit Gl. (36) zu verbinden ist, um sämmtliche Bestimmungen für λ, μ, ϑ zu enthalten.

Gl. (38) zeigt, dass, wenn eine der Grössen λ, μ unabhängig von u ist, die andre es auch sein muss. In diesem Falle geben die Gl. (35) (37) übereinstimmend:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial v}=-\sin\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v};\quad\text{also}\quad\vartheta=u_1-v_1 \tag{40}$$

wo u_1 Function von u, und

$$v_1=\int\sin\mu\,\partial\lambda$$

Function von v ist. Gl. (36) wird alsdann:

$$\cos ku=\frac{1}{\sin\mu}\,\frac{\partial(\sin(u_1-v_1)\cos\mu)}{\partial v}$$

oder, wenn man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\cos v_1\cos\mu)}{\partial v}&=-c\sin\gamma\sin\mu\\ \frac{\partial(\sin v_1\cos\mu)}{\partial v}&=-c\cos\gamma\sin\mu\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

setzt:

$$\cos\lambda\mu = c\cos(r_1 - \gamma) \tag{42}$$

Hieraus erhellt, dass c und γ, weil sie nicht von u abhangen, überhaupt constant sein müssen. Die Gl. (41) geben, entwickelt, die Werte:

$$\frac{\partial\mu}{\partial r} = c\sin(r_1 - \gamma)\,; \qquad \frac{\partial r_1}{\partial r} = -c\cos(r_1 - \gamma)\,\mathrm{tg}\,\mu$$

woraus durch Integration:

$$\begin{aligned}
\cos\mu\cos(r_1 + \gamma) &= \sin\alpha\\
\cos\mu\sin(r_1 + \gamma) &= \cos\alpha\cos(cr + \beta)\\
\sin\mu \qquad &= \cos\alpha\sin(cr + \beta)
\end{aligned}$$

Jetzt ist nach Gl. (40)

$$\partial\lambda = \frac{\partial r_1}{\sin\mu}$$

und man findet nach Integration mit Hülfe der Relation zwischen u und r_1:

$$\begin{aligned}
\cos(r_1 + \gamma)\cos\mu &= \sin\alpha\\
\cos(r_1 + \gamma)\sin\mu &= \cos\alpha\cos(\lambda + \varepsilon)\\
\sin(r_1 + \gamma) \qquad &= \cos\alpha\sin(\lambda + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Hier sind α, β, ε die Constanten der 3 successiven Integrationen. Führt man nun die Werte der partiellen Differentialquotienten der Coordinaten mittelst der gefundenen Relationen auf u und r zurück, so ergiebt die Integration der Ausdrücke von ∂x, ∂y, ∂z ohne Schwierigkeit:

$$x = \frac{\sin ku}{ck}\{\sin\varepsilon\sin(cr + \beta) - \sin\alpha\cos\varepsilon\cos(cr + \beta)\} - u_2\cos\alpha\cos\varepsilon$$

$$y = \frac{\sin ku}{ck}\{\cos\varepsilon\sin(cr + \beta) + \sin\alpha\sin\varepsilon\cos(cr + \beta)\} + u_2\cos\alpha\sin\varepsilon$$

$$z = -\frac{\sin ku}{ck}\cos\alpha\cos(cr + \beta) + u_2\sin\alpha$$

wo zu Abkürzung

$$u_2 = \int\sin(u_1 + \gamma)\,\partial u$$

gesetzt ist. Verbindet man die 3 Coordinatenwerte wie folgt

$$\begin{gathered}
(-x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)\sin\alpha - z\cos\alpha\\
x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon\\
(-x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)\cos\alpha + z\sin\alpha
\end{gathered}$$

so stellen diese 3 Grössen die Coordinaten desselben Punktes für

andre Lage der Axen dar. Bezeichnet man sie wieder mit x, y, z, so werden die Gleichungen der Fläche:

$$x = \frac{\sin ku}{ck}\cos(cv+\beta); \quad y = \frac{\sin ku}{ck}\sin(cv+\beta); \quad z = u_2 \tag{43}$$

das sind die der Fläche, welche die ebene Curve

$$x = \frac{\sin ku}{ck}; \quad y = 0; \quad z = u_2$$

bei Rotation um die z Axe beschreibt. Für den Fall $c = 1$ wird nach (42)

$$u_1 + \gamma = ku; \quad \text{also} \quad u_2 = -\frac{\cos ku}{k}$$

und die Werte (43) ergeben:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k^2}$$

Die Fläche geht alsdann, wofern k^2 positiv ist, in eine Kugel vom Radius $\frac{1}{k}$ über. Da nun nach §. 17. alle Flächen, welche gleichwertige e, f, g haben, auf einander abwickelbar sind, so sind alle Flächen constanter positiver Krümmung auf einer Kugel abwickelbar. Doch bemerkt man leicht, dass nicht die ganze geschlossene Fläche die ganze Kugel bedecken kann, sondern entweder, für $c > 1$, nur einen Teil derselben, oder, für $c < 1$, die Kugel zum Teil mehrfach bedeckt.

§. 40. **Kleinste Flächen. Bedingung.** Es ist die Aufgabe, unter allen Flächen, welche von derselben geschlossenen Linie begrenzt werden, die kleinste zu finden. Diese kleinste Fläche hat dann der Bedingung zu genügen, dass sie bei jeder unendlich kleinen Verschiebung ihrer innern (nicht zum Umfang gehörigen) Punkte wächst, dass also ihre Variation nie negativ ist. Dann kann aber die Variation auch nie positiv sein, weil sie sonst bei rückgängiger Verschiebung negativ wäre. Folglich ist die Variation der Fläche

$$\delta\Omega = \delta\int\int t\,\partial u\,\partial v = \int\int \delta t\,\partial u\,\partial v = 0 \tag{44}$$

Berechnet man δt aus I. Gl. (10) (3), so findet man:

$$\delta t = \frac{g\,\delta e - 2f\,\delta f + e\,\delta g}{t}$$

$$= L\delta\frac{\partial x}{\partial u} + L_1\delta\frac{\partial x}{\partial v} + M\delta\frac{\partial y}{\partial u} + M_1\delta\frac{\partial y}{\partial v} + N\delta\frac{\partial z}{\partial u} + N_1\delta\frac{\partial z}{\partial v}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{t}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & f \\ \frac{\partial x}{\partial v} & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix} \\ L_1 &= \frac{1}{t}\begin{vmatrix} e & \frac{\partial x}{\partial u} \\ f & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial u} \\ r & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

und die übrigen Coefficienten analog bestimmt sind, oder:

$$\delta t = \frac{\partial}{\partial u}(L\,\delta x + M\delta y + N\delta z) + \frac{\partial}{\partial v}(L_1\,\delta x + M_1\,\delta y + N_1\,\delta z)$$
$$- \left(\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\delta x - \left(\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M_1}{\partial v}\right)\delta y - \left(\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial N_1}{\partial v}\right)\delta z$$

Führt man diesen Wert in (44) ein und integrirt den ersten Term zuerst nach u in der Ausdehnung, in welcher die Parameterlinie (u) innerhalb des Flächenstücks Ω liegt, so werden die Grenzen entweder die Durchschnitte mit dem Umfang, in welchem δx, δy, δz null sind, oder, falls die Parameterlinie in sich selbst zurückläuft, ein und derselbe Punkt dieser Linie, also $L\,\delta x + M\delta y + N\delta z$ für beide Integralgrenzen dieselbe Grösse. In beiden Fällen verschwindet der Ausdruck schon nach erster Integration. Dasselbe gilt vom zweiten Term, wenn man ihn zuerst nach v integrirt. In den übrigen Termen sind die Factoren δx, δy, δz für alle Flächenelemente unabhängig willkürlich. Daher kann das Integral nur null sein, wenn es die Coefficienten der Variationen sind, und man erhält:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M_1}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial N_1}{\partial v} = 0 \qquad (46)$$

Setzt man für L, L_1 die obigen Werte und führt die Differentiation mit Anwendung der Formeln I. Gl. (19) aus, so kommt:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial v} = -(H + J_1)pt = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)pt \qquad (47)$$

und die 3 Gl. (46) reduciren sich auf die eine:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0 \qquad (48)$$

Es hat sich ergeben:

S. 20. **Auf jeder kleinsten Fläche ist durchgängig die Summe der Hauptkrümmungen null.**

Durch diese Eigenschaft wird eine besondere Art von Flächen definirt, welche, wenn nicht ausschliesslich, jedenfalls alle kleinsten Flächen in sich begreift. Da offenbar jeder Teil einer kleinsten Fläche selbst kleinste Fläche in seinem Umfang ist, so ist der Begriff von der Begrenzung unabhängig.

§. 41. **Darstellung der kleinsten Flächen.** Löst man die Gleichungen I. (19) nach $\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$ auf, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=P\frac{\partial p}{\partial u}+Q\frac{\partial p}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=R\frac{\partial p}{\partial u}+S\frac{\partial p}{\partial v}$$

wo

$$P=-KJ_1;\quad Q=KH_1;\quad R=KJ;\quad S=-KH \tag{49}$$

$$\frac{1}{K}=-\begin{vmatrix}HH_1\\JJ_1\end{vmatrix}=-\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$$

gesetzt ist, Formeln die gleicherweise für die y und z gelten. Setzt man

$$p=\sin u\cos v;\quad q=\sin u\sin v;\quad r=\cos u \tag{50}$$

und wendet auf die so definirten Parameter u, v die obigen Formeln an, so lauten diese:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}&=P\cos u\cos v-Q\sin u\sin v\\
\frac{\partial x}{\partial v}&=R\cos u\cos v-S\sin u\sin v\\
\frac{\partial y}{\partial u}&=P\cos u\sin v+Q\sin u\cos v\\
\frac{\partial y}{\partial v}&=R\cos u\sin v+Q\sin u\cos v\\
\frac{\partial z}{\partial u}&=-P\sin u\\
\frac{\partial z}{\partial v}&=-R\sin u
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Eliminirt man durch Differentiation x, y, z, so findet man:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos u+(R-Q)\sin u=0\\
&\left(\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{\partial S}{\partial u}\right)\sin u+(P-S)\cos u=0\\
&\left(\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial R}{\partial u}\right)\sin u-R\cos u=0
\end{aligned} \tag{52}$$

Die erste und dritte Gleichung lassen sich verbinden zu

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial u} = Q \sin u \cos u$$

$$R = Q \sin^2 u$$

und nach Elimination von R zu

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u} \sin^2 u + 3 Q \sin u \cos u$$

Dies lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{\sin u} \frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial u}$$

oder, wenn man

$$\frac{\partial u}{\sin u} = \partial w \tag{53}$$

das ist

$$\frac{1}{\sin u} = \cos i w; \quad \cot u = i \sin i w \tag{54}$$

setzt:

$$\frac{\partial (P \sin^2 u)}{\partial v} = \frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial w}$$

eine Gleichung die allgemein befriedigt wird durch

$$P \sin^2 u = \frac{\partial T}{\partial w}; \quad Q \sin^3 u = \frac{\partial T}{\partial v} \tag{55}$$

Jetzt bleibt noch Gl. (52) zu erfüllen, die wir mit $\sin^2 u$ multipliciren und folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial v} - \frac{\partial (S \sin^2 u)}{\partial w} + (P + S) \sin^2 u \cos u = 0$$

Hier ist nach (49)

$$P + S = -(H + J_1) K = \varrho_1 + \varrho_2$$

das ist auf kleinsten Flächen null; daher geht hier die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial v} + \frac{\partial (P \sin^2 u)}{\partial w} = 0$$

und nach Einführung der Werte (55) in

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$T = \varphi(v+iw, i) + \varphi(v-iw, -i)$$

woraus nach (55):

$$\begin{aligned} P\sin^2 u &= i\varphi'(v+iw, i) - i\varphi'(v-iw, -i) \\ Q\sin^3 u &= R\sin u = \varphi'(v+iw, i) + \varphi'(v-iw, -i) \end{aligned}$$

Dies in die Gl. (51) eingeführt giebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= \sin(v+iw)\,\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\ \frac{\partial x}{\partial w} &= -\sin(v+iw)\,\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= -i\cos(v+iw)\,\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\ \frac{\partial y}{\partial w} &= \cos(v+iw)\,\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= -i\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

und nach Integration:

$$\left.\begin{aligned} x &= \chi(v+iw, i) + \chi(v-iw, -i) \\ y &= \psi(v+iw, i) + \psi(v-iw, -i) \\ z &= -\varphi(v+iw, i) - \varphi(v-iw, -i) \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

wo zwischen den Functionen φ, χ, ψ die Relationen bestehen:

$$\chi'(V, i) = i\varphi'(V, i)\sin V; \quad \psi'(V, i) = -i\varphi'(V, i)\cos V$$

so dass nur eine der drei willkürlich bleibt.

Betrachtet man w, v als Parameter der Fläche, so werden, wie sich direct aus den Werten (56) ergiebt, die Fundamentalgrössen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} e = g = -t &= 4\varphi'(v+iw, i)\,\varphi'(v-iw, -i)\cos^2 iw \\ f &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

Dass t ein negatives Vorzeichen erhält, ergiebt sich, wenn man die Werte von pt, qt, rt ihrer Definition gemäss bildet und mit (50) vergleicht. Da ferner nach (50) (54)

$$p = \frac{\cos v}{\cos iw}; \quad q = \frac{\sin v}{\cos iw}; \quad r = i\,\mathrm{tg}\, iw \tag{59}$$

ist, so findet man nach Differentiation der Gl. (56) die Fundamentalgrössen 2. Ordnung gemäss ihrer Definition §. 5.

$$\left.\begin{aligned} -E = G &= i\varphi'(v+iw, i) - i\varphi'(v-iw, -i) \\ F &= -\varphi'(v+iw, i) - \varphi'(v-iw, -i) \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

woraus:

$$F^2 - EG = 4\varphi'(v+iw, i)\,\varphi'(v-iw, -i)$$

und in Verbindung mit (58):

$$\left.\begin{aligned} -\varrho_1\varrho_2 = \frac{t^2}{F^2 - EG} = \frac{1}{JH_1 - HJ_1} = K = \\ 4\varphi'(v+iw, i)\,\varphi'(v-iw, -i)\cos^4 iw \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien sind die positive und die negative Quadratwurzel aus dieser Grösse.

§. 42. **Krümmungslinien auf kleinster Fläche.** Nach (49) hat man (in Parametern u, v):

$$H = -J_1 = \frac{P}{K} = -\frac{i}{4\cos^2 iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} - \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

$$H_1 = \frac{Q}{K} = \frac{1}{4\cos iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

$$J = \frac{R}{K} = \frac{1}{4\cos^3 iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

Daher lautet die Gleichung, welche die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt, I. (54):

$$(k^2 - \cos^2 iw)\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{1}{\varphi\,(v-iw, -i)}\right\}$$
$$- 2ik\cos iw\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} - \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

oder:

$$\frac{(k - i\cos iw)^2}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{(k + i\cos iw)^2}{\varphi'(v-iw, -i)} = 0$$

Hier ist

$$k = \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial w}\cos iw$$

Dies eingeführt giebt:

$$\varphi'(v+iw, i)(\partial v + i\partial w)^2 + \varphi'(v-iw, -i)(\partial v - i\partial w)^2 = 0$$

Setzt man

$$\varphi'(V,i) = i\{\Phi'(V,i)\}^2 \tag{62}$$

so zerfällt die Gleichung in

$$\Phi'(v+iw,i)\partial(v+iw) \pm \Phi'(v-iw,-i)\partial(v-iw) = 0$$

Die Integration ergiebt als Gleichungen der beiden Krümmungslinien

$$\left.\begin{aligned}\Phi(v+iw,i)+\Phi(v-iw,-i) &= u_1 = \text{const.}\\ \Phi(v+iw,i)-\Phi(v-iw,-i) &= iv_1 = \text{const.}\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

und u_1, v_1 sind die Parameter des Systems der Krümmungslinien. Hieraus berechnet man leicht nach II. Gl. (2) die Fundamentalgrössen 2. Ordnung E, G, für die Parameter u_1, v_1, und findet:

$$E_1 = -1; \quad G_1 = 1$$

woraus weiter nach II. Gl. (15):

$$e_1 = -\varrho_1; \quad g_1 = \varrho_2$$

§. 43. **Asymptotische Linien auf kleinster Fläche.** Sind u_2, v_2 die Parameter der asymptotischen Linien, so lauten die zu ihrer Bestimmung dienenden Relationen II. Gl. (2):

$$-1 = F_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}; \quad 1 = F_2 \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial v_1}$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial v_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}$$

Zerlegt man die letzte in

$$\frac{\partial v_2}{\partial u_1} = -\frac{m^2}{F_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1}; \quad \frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{m^2}{F_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1}$$

so gehen die beiden ersten über in

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2 = m^{-2}; \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 = m^{-2}$$

Nimmt man die Quadratwurzeln positiv, so wird

$$\partial u_2 = \frac{\partial u_1 + \partial v_1}{m}; \quad \partial v_2 = -\frac{m}{F_2}(\partial u_1 - \partial v_1)$$

folglich ist u_2 Function von u_1+v_1, und v_2 Function von u_1-v_1. Eine andere Vorzeichenbestimmung würde bloss Vertauschung von u_2 und v_2 bewirken. Da die willkürlichen Functionen ohne Einfluss auf die Parameterlinien sind, so setzen wir einfach:

$$\left.\begin{aligned}u_2 = u_1+v_1 &= (1-i)\Phi(v+iw,i)+(1+i)\Phi(v-iw,-i)\\ v_2 = u_1-v_1 &= (1+i)\Phi(v+iw,i)+(1-i)\Phi(v-iw,-i)\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Gleichzeitig ergiebt sich:

$$F_2 = -1$$

Die Relationen II. Gl. (1) werden nach Einsetzung bekannter Werte:

$$-\varrho_1 = e_2 + 2f_2 + g_2$$
$$0 = e_2 \qquad - g_2$$
$$\varrho_2 = e_2 - 2f_2 + g_2$$

woraus:

$$e_2 = g_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{4} = \tfrac{1}{2}\varrho_2; \quad f_2 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4} = 0$$

$$\partial s^2 = \tfrac{1}{2}\varrho_2 (\partial u_2{}^2 + \partial v_2{}^2) \tag{65}$$

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{2}{\varrho_2} \frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial u_2{}^2 + \partial v_2{}^2}$$

Gl. (65) zeigt, dass u_2, v_2 zugleich Abbildungsparameter sind. Hierzu genügt indes nicht, dass sie asymptotische Parameter bezeichnen; vielmehr müssen noch 2 Gleichungen, etwa $e_2 = g_2 = \frac{1}{2}\varrho_2$, hinzukommen, welche die willkürlichen Functionen bestimmen.

§. 44. **Flächen von constanter Summe der Hauptkrümmungsradien.** Die Darstellung der kleinsten Flächen lässt sich zur Lösung der folgenden weiteren Aufgabe verwenden. Sind nämlich ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der vom Punkte (xyz) erzeugten Fläche, so sind nach §. 19. $\varrho_1 + c$, $\varrho_2 + c$ die Hauptkrümmungsradien der parallelen Fläche im Abstande c, welche der Punkt

$$x' = x - pc; \quad y' = y - qc; \quad z' = z - rc \tag{66}$$

erzeugt. Ist dann erstere Fläche eine kleinste, also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0$$

so ist die Summe der Hauptkrümmungsradien der letztern $= 2c$. Hiermit findet die Aufgabe:

Die Fläche allgemein darzustellen, deren Hauptkrümmungsradien die constante Summe $2c$ haben,

ohne weitere Untersuchung ihre Lösung. Die Gl. (66) stellen die verlangte Fläche dar, wenn man darin für x, y, z die Werte (57), für p, q, r die Werte (59) setzt; sie lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \chi(v + iw, i) + \chi(v - iw, -i) - \frac{c \cos v}{\cos iw} \\ y' &= \psi(v + iw, i) + \psi(v - iw, -i) - \frac{c \sin v}{\cos iw} \\ z' &= -\varphi(v + iw, i) - \varphi(v - iw, -i) - ic \operatorname{tg} iw \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

§. 45. **Kleinste Fläche bei constantem Volum.** Von der Oberfläche eines Körpers sei ein begrenzter Teil Ω variabel, der übrige Teil Ω_1 unveränderlich. Die Veränderungen von Ω seien jedoch der Bedingung unterworfen, dass das Volum des Körpers P constant bleibt. Der Flächeninhalt

$$\Omega = \int\int t\,\partial u\,\partial v$$

soll als Minimum bestimmt werden.

Die Bedingung des Minimums ist hier noch, wie in §. 40.

$$\int\int\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial u}+\frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\delta x+\left(\frac{\partial M}{\partial u}+\frac{\partial M_1}{\partial v}\right)\delta y+\left(\frac{\partial N}{\partial u}+\frac{\partial N_1}{\partial v}\right)\delta z\right\}\partial u\,\partial v = 0$$

das ist nach Gl. (47) und den analogen:

$$\int\int\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)(p\delta x+q\delta y+r\delta z)\,t\,\partial u\,\partial v = 0 \tag{68}$$

Es tritt nur die Bedingung hinzu, dass δx, δy, δz einem constanten P entsprechen. Alle unter dieser Beschränkung gestatteten Werte können die Gl. (68) erfüllen, ohne dass jedes Element des Integrals null wird.

Nehmen wir nun an, dass jeder Punkt der Fläche in der Richtung der Normale verschoben wird, wobei noch alle Veränderungen der Fläche möglich bleiben, und lassen die Parameterlinien (w) alle Flächen $w =$ const. normal schneiden, dann ist die Verschiebung des Punktes (uvw)

$$= \frac{\delta x}{p} = \frac{\delta y}{q} = \frac{\delta z}{r} = p\delta x+q\delta y+r\delta z \tag{69}$$

Erzeugt jener Punkt die Fläche Ω, so erzeugt gleichzeitig diese Verschiebungslinie den Raum zwischen ihr und der veränderten Fläche, d. i. die Variation des Volums δP. Ein Element dieses Raumes ist ein Prisma, dessen Grundfläche das Flächenelement $t\,\partial u\,\partial v$, und dessen Höhe die Verschiebung (69) ist; folglich ist die Variation des Volums

$$\delta P = \int\int(p\delta x+q\delta y+r\delta z)\,t\,\partial u\,\partial v$$

und diese muss der Bedingung gemäss constant null sein. Setzt man zur Abkürzung

$$\varDelta = (p\delta x+q\delta y+r\delta z)\,t\,\partial u\,\partial v$$

so lauten die 2 Bedingungen:

$$\int\int\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\varDelta = 0;\quad \int\int\varDelta = 0 \tag{70}$$

Beide können noch erfüllt werden, wenn nur 2 beliebige Flächen-

elemente variiren, die ganze übrige Fläche hingegen unverändert bleibt. Bezeichnen wir die jenen 2 Elementen entsprechenden Werte durch Δ, ϱ_1, ϱ_2 und Δ', ϱ_1', ϱ_2', so gehen die Gl. (70) über in

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\Delta+\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\Delta'=0; \quad \Delta+\Delta'=0$$

woraus:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}$$

das heisst: die Summe der Hauptkrümmungen hat in je 2 beliebigen Punkten der Fläche denselben Wert, ist also über die ganze Fläche constant, und man hat den Satz:

S. 21. Auf kleinster Fläche für constantes Volum ist die Summe der Hauptkrümmungen constant.

Die Bedeutung dieser Constanten, die wir mit a bezeichnen, können wir leicht aus der vorhergehenden Rechnung entnehmen, nach welcher für eine beliebige Fläche, und beliebige, nur immer normale, Verschiebungen

$$\delta\Omega=\iint\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\Delta; \quad \delta P=\iint\Delta$$

ist. Ist dann Ω eine kleinste Fläche für constantes Volum, so hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=a$$

also

$$\delta\Omega=a\delta P$$

für beliebige Verrückung. Jetzt sei die veränderte Fläche kleinste für das constante Volum $P+\partial P$, dann wird

$$a=\frac{\partial\Omega}{\partial P}$$

Betrachtet man das gegebene Volum als unabhängige Variabele, die ihm entsprechende kleinste Fläche als Function derselben, so ist die Summe der Hauptkrümmungen die derivirte Function.

§. 46. **Rotationsflächen.** Eine Rotationsfläche wird von einer ebenen Linie erzeugt, welche um eine Gerade in derselben rotirt. Die Gerade heisst die Rotationsaxe, die erzeugende Linie der Meridian, der von einem ihrer Punkte erzeugte Kreis ein Parallelkreis. Ein Durchschnittspunkt der Fläche und ihrer Axe heisst ein Scheitel oder eine Spitze, jenachdem die Axe daselbst Normale ist oder nicht.

Wir nehmen die Rotationsaxe zur Axe der z, den Meridianbogen zum Parameter u, den Rotationswinkel zum Parameter v, und bezeichnen vorläufig die ebenen cartesischen Coordinaten des Meridians durch x_0, z; dann sind die Gleichungen der Rotationsfläche:

$$x = x_0 \cos v; \quad y = x_0 \sin v; \quad z = z \quad .$$

wo x_0, z Functionen von u sind. Hieraus folgen die Werte der Fundamentalgrössen 1. Ordnung:

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = x_0^2; \quad t = x_0$$

Wir schreiben demgemäss die Flächengleichungen:

$$x = t \cos v; \quad y = t \sin v \tag{71}$$

Die Werte von e, f zeigen, dass die Parameter orthogonal geodätisch sind. Bezeichnet ferner τ den Krümmungswinkel des Meridians, so dass

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \cos \tau; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sin \tau$$

wird, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos \tau \cos v; & \frac{\partial y}{\partial u} &= \cos \tau \sin v; & \frac{\partial z}{\partial u} &= \sin \tau \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -t \sin v; & \frac{\partial y}{\partial v} &= t \cos v; & \frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

woraus:

$$p = -\sin \tau \cos v; \quad q = -\sin \tau \sin v; \quad r = \cos \tau \tag{73}$$

In einem Scheitel wird $\tau = 0$, also

$$p = 0; \quad q = 0; \quad r = 1$$

in einer Spitze $\tau =$ const. bleiben p, q abhängig von v; statt einer Normale hat hier die Fläche eine normale konische Fläche. Die Fundamentalgrössen 2. Ordnung werden:

$$E = \frac{\partial \tau}{\partial u}; \quad F = 0; \quad G = t \sin \tau \tag{74}$$

Demnach sind die Parameterlinien (u), (v), d. i. die Meridiane und Parallelkreise, auch Krümmungslinien. Infolge dessen hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E}{e} = \frac{\partial \tau}{\partial u}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{G}{g} = \frac{\sin \tau}{t} \tag{75}$$

Die Gleichungen der Mittelpunktsflächen werden:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \varrho_1 p = \left(t - \frac{\partial u}{\partial \tau}\sin\tau\right)\cos v \\ y_1 &= y + \varrho_1 q = \left(t - \frac{\partial u}{\partial \tau}\sin\tau\right)\sin v \\ z_1 &= z + \varrho_1 r = z + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cos\tau \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

und

$$x_2 = x + \varrho_2 p = 0; \quad y_2 = y + \varrho_2 q = 0; \quad z_2 = z + \varrho_2 r = z + t\cot\tau$$

Die erstere ist also eine Rotationsfläche von gemeinsamer Axe, die letztere degenerirt in die Axe selbst. Die Beziehung zwischen conjugirten Tangenten wird:

$$kk' = -\frac{1}{t\sin\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}$$

Die Nullkrümmungstangenten sind bestimmt durch

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \pm\sqrt{-\frac{1}{t\sin\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}} \tag{77}$$

der Drehungswinkel ν der Normale durch

$$\partial\nu^2 = \partial\tau^2 + \sin^2\tau\,\partial v^2 \tag{78}$$

Der Drehpunktsabstand wird:

$$R = \frac{\partial\tau\,\partial u + t\sin\tau\,\partial v^2}{\partial\nu^2} \tag{79}$$

die Gleitung längs der momentanen Rotationsaxe:

$$\partial Q = \frac{\sin\tau\,\partial u - t\,\partial\tau}{\partial\nu}\partial v \tag{80}$$

die Bedingung eines Nabelpunkts:

$$\frac{\partial\tau}{\partial u} = \frac{\sin\tau}{t} \tag{81}$$

Sie wird, da sie v nicht enthält, im allgemeinen durch einen Parallelkreis, nur für $t = 0$; $\tau = 0$ durch einen Punkt erfüllt. Eliminirt man t durch Differentiation, so erhält man als Gleichung der Nabellinie:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2} = 0$$

Aus gleichem Grunde zerfällt der Ausdruck eines Flächenstücks zwischen Meridianen und Parallelkreisen in 2 unabhängige Factoren:

$$\Omega = v\int t\,\partial u \tag{81}$$

Um ein Körperstück, ganz oder zum Teil begrenzt von einer Rotationsfläche, zu berechnen, kann man dasselbe von einer variabeln Rotationsfläche erzeugen lassen. Man hat dann bloss t, z, τ als Functionen von u und einem dritten Parameter w zu betrachten. Der Ausdruck des Körperelements I. Gl. (15) geht dann nach Einführung der Werte (72) über in

$$\partial^3 P = t\left(\frac{\partial z}{\partial w}\cos\tau - \frac{\partial t}{\partial w}\sin\tau\right)\partial u\,\partial v\,\partial w$$

$$= t\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}\partial u\,\partial v\,\partial w = t\,\partial v\,\partial^2 Q$$

wo $\partial^2 Q$ das Element des erzeugenden ebenen Flächenstücks darstellt. Ist das Körperstück von Meridian- und Parallelkreisebenen begrenzt, so zerfällt das Integral in 2 unabhängige Factoren:

$$P = v\iint t\,\partial^2 Q \tag{82}$$

In (81) und (82) ist v der Winkel zwischen den 2 begrenzenden Meridianebenen.

§. 47. **Asymptotische Linien auf Rotationsflächen.** Die Differentialgleichungen der asymptotischen Linien (77) geben integrirt:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v - \int\sqrt{-\frac{\partial u\,\partial\tau}{t\sin\tau}} \\ v_1 &= v + \int\sqrt{-\frac{\partial u\,\partial\tau}{t\sin\tau}} \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

und u_1, v_1 sind die Parameter des Systems. Diesen entsprechen, wie man am leichtesten aus II. Gl. (1) (2) findet, die Fundamentalgrössen:

$$e_1 = g_1 = \frac{t}{4}\left(t - \sin\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) \tag{84}$$

$$f_1 = \frac{t}{4}\left(t + \sin\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}\right); \quad t_1 = \frac{t}{4}\sqrt{-t\sin\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}}$$

$$F_1 = \tfrac{1}{2}t\sin\tau$$

§. 48. **Orthogonal geodätische Systeme auf Rotationsflächen.** Sind u_1, v_1 die Parameter eines beliebigen orthogonal geodätischen Systems, u, v die bisherigen, so sind nach II. Gl. (1) die Relationen zwischen beiden:

$$1=\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+t_1^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$0=\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+t_1^2\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$t^2=\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+t_1^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

Erfüllt man sie durch die Werte

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\partial u_1}{\partial u}=\cos\varkappa; & \frac{\partial u_1}{\partial v}=t\sin\varkappa \\ \frac{\partial v_1}{\partial u}=-\frac{1}{t_1}\sin\varkappa; & \frac{\partial v_1}{\partial v}=\frac{t}{t_1}\cos\varkappa\end{array}\right\} \tag{85}$$

und eliminirt u_1, so kommt:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial u}t\cot\varkappa+\frac{\partial\varkappa}{\partial v}+\frac{\partial t}{\partial u}=0$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$v=\int\frac{h\,\partial u}{t\sqrt{t^2-h^2}}+\varphi'(h);\qquad h=t\sin\varkappa \tag{86}$$

wo unter dem Integralzeichen h als constant betrachtet werden muss, und φ eine willkürliche Function bezeichnet. Bildet man aus den Werten (85) die Ausdrücke von ∂u_1, ∂v_1, und reducirt mittelst der Gl. (86) v und $\varkappa$ auf u und h als Unabhängige, so kommt:

$$\partial u_1=\frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2-h^2}}+h\,\partial h\left\{\int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}+\varphi''(h)\right\}$$

$$\partial v_1=\frac{\partial h}{t_1}\sqrt{t^2-h^2}\left\{\int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}+\varphi''(h)\right\}$$

Erstere Gleichung giebt integrirt:

$$u_1=\int\frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2-h^2}}+h\varphi'(h)-\varphi(h) \tag{87}$$

Nach letzterer ist v_1 Function von h; setzt man

$$v_1=h$$

so wird die Gleichung erfüllt durch

$$t_1=\sqrt{t^2-h^2}\left\{\int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}+\varphi''(h)\right\} \tag{88}$$

Nach Einführung der Werte (85) in II. Gl. (2) ergeben sich zunächst folgende Ausdrücke der Fundamentalgrössen 2. Ordnung:

$$E_1 = \frac{\partial \tau}{\partial u}\cos^2\varkappa + \frac{\sin\tau}{t}\sin^2\varkappa; \quad F_1 = t_1\left(\frac{\sin\tau}{t} - \frac{\partial\tau}{\partial u}\right)\sin\varkappa\cos\varkappa$$

$$G_1 = t_1^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\sin^2\varkappa + \frac{\sin\tau}{t}\cos^2\varkappa\right)$$

das ist nach (86) und (88)

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{h^2}{t^3}\sin\tau + \frac{t^2-h^2}{t^2}\frac{\partial\tau}{\partial u} \\ F_1 &= \frac{t^2-h^2}{t^2}\left(\frac{\sin\tau}{t} - \frac{\partial\tau}{\partial u}\right)S \\ G_1 &= \frac{t^2-h^2}{t^2}\left(\frac{t^2-h^2}{t}\sin\tau + h^2\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)S^2 \\ S &= \int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} + \varphi''(h) \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Sollen u_1, v_1 geodätische Polarcoordinaten sein, so muss zur t_1 unabhängig von v_1, d. i. von h, für einen Wert von u_1 verschwinden. Entspricht diesem Werte die untere Grenze der Integrale in (87) und (88), so muss sein

$$\sqrt{t^2-h^2}\,\varphi''(h) = 0$$

für jedes h, also

$$\varphi(h) = ah + b$$

Gleichzeitig muss u_1 verschwinden; das giebt: $b = 0$. Jetzt ist

$$\frac{t_1}{u_1} = \sqrt{t^2-h^2}\int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} : \int\frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2-h^2}}$$

Der untern Grenze der Integrale entspreche $t = c$; lässt man dann u stetig in die untere Grenze übergehen, so wird

$$\lim\frac{t_1}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{c^2-h^2}}$$

Nach §. 32. hat man daher zu setzen:

$$v_1 = \int\frac{\partial h}{\sqrt{c^2-h^2}} = \arcsin\frac{h}{c}; \quad h = c\sin v_1$$

dann werden nach Gl. (87) und (86) die Relationen zwischen (u, v) und (u_1, v_1):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int\limits_{t=c} \frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2 - c^2 \sin^2 v_1}} \\ v &= \int\limits_{t=c} \frac{c \sin v_1\, \partial u}{t\sqrt{t^2 - c^2 \sin^2 v_1}} + a \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

§. 49. **Conforme Abbildung der Rotationsflächen.** Zur Auffindung der Abbildungsparameter u_2, v_2, bestimmt durch die Bedingung $e_2 = g_2 = t_2, f_2 = 0$, haben wir die Gleichungen zu lösen:

$$\frac{1}{t_2} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial u}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial u}\frac{\partial u_2}{\partial v} + \frac{\partial v_2}{\partial u}\frac{\partial v_2}{\partial v}$$

$$\frac{t^2}{t_2} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial v}\right)^2$$

und erfüllen sie durch die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial u} &= \frac{\cos \varkappa}{\sqrt{t_2}}; & \frac{\partial u_2}{\partial v} &= \frac{t}{\sqrt{t_2}} \sin \varkappa \\ \frac{\partial v_2}{\partial u} &= -\frac{\sin \varkappa}{\sqrt{t_2}}, & \frac{\partial v_2}{\partial v} &= \frac{t}{\sqrt{t_2}} \cos \varkappa \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

Eliminirt man u_2 und v_2 durch Differentiation, so erhält man 2 Gleichungen, die sich leicht zu folgenden verbinden:

$$\frac{t}{2}\frac{\partial \log t_2}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial \varkappa}{\partial v}; \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \log t_2}{\partial v} + t\frac{\partial \varkappa}{\partial u} = 0$$

Die zweite wird erfüllt durch

$$\log t_2 = 2t\frac{\partial T}{\partial u}; \qquad \varkappa = -\frac{\partial T}{\partial v} \quad (92)$$

Die erste geht alsdann, wenn man

$$\frac{\partial u}{t} = \partial w$$

setzt, über in

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = \frac{\partial \log t}{\partial w}$$

Das Integral hiervon ist:

$$T = \Phi(w + iv, i) + \Phi(w - iv, -i) + \int \log t\, \partial w$$

woraus nach (92):

$$\tfrac{1}{2}\log t_2 = \Phi'(w+iv,\ i) + \Phi'(w-iv,\ -i) + \log t$$
$$\varkappa = -i\Phi'(w+iv,\ i) + i\Phi'(w-iv,\ -i)$$

oder, wenn man

$$\Phi'(W,\ i) = -\tfrac{1}{2}\log 2\varphi'(W,\ i)$$

setzt:

$$\frac{t}{\sqrt{t_2}} = 2\sqrt{\varphi'(w+iv,\ i)\,\varphi'(w-iv,\ -i)}$$

$$\varkappa = \frac{i}{2}\log\frac{\varphi'(w+iv,\ i)}{\varphi'(w-iv,\ -i)}$$

$$\cos\varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w+iv,\ i)}{\varphi'(w-iv,\ -i)}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w-iv,\ -i)}{\varphi'(w+iv,\ i)}}$$

$$\sin\varkappa = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w+iv,\ i)}{\varphi'(w-iv,\ -i)}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w-iv,\ -i)}{\varphi'(w+iv,\ i)}}$$

Dies in (91) eingeführt giebt:

$$\partial u_2 = \varphi'(w+iv,\ i)\,\partial(w+iv) + \varphi'(w-iv,\ -i)\,\partial(w-iv)$$
$$\partial v_2 = -i\varphi'(w+iv,\ i)\,\partial(w+iv) + i\varphi'(w-iv,\ -i)\,\partial(w-iv)$$

und nach Integration, mit Weglassung der Constanten:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \varphi(w+iv,\ i) + \varphi(w-iv,\ -i) \\ iv_2 &= \varphi(w+iv,\ i) - \varphi(w-iv,\ -i) \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

woraus:

$$2\varphi(w \pm iv,\ \pm i) = u_2 \pm iv_2$$

oder, durch die inverse Function ψ ausgedrückt

$$w \pm iv = \psi(u_2 \pm iv_2,\ \pm i)$$

Hier ist $w = \int \frac{\partial u}{t}$, und φ oder ψ willkürliche Function.

§. 50. **Abwickelung der Rotationsflächen auf einander.** Ist eine Rotationsfläche, wie bisher, in Parametern der Krümmungslinien u v gegeben, so muss für jede auf ihr abwickelbare Rotationsfläche, wenn man sie in denselben Parametern darstellt, gleichfalls $e = 1$; $f = 0$; $g = t^2$ sein; allein die u und v brauchen nicht die gleiche geometrische Bedeutung zu haben, mithin auch nicht t die Coordinate der Meridians zu sein. Sind nun auf der zweiten Fläche u', v' die Parameter der Krümmungslinien, und entspricht der Punkt $(u'v')$ dem Punkte (uv), so ist die Bedingung der Abwickelbarkeit

$$\partial s^2 = \partial u^2 + t^2\partial v^2 = \partial u'^2 + t'^2\partial v'^2$$

Beschränken wir uns auf die specielle Lösung, wo die Meridiane

wieder Meridiane, die Parallelkreise wieder Parallelkreise werden, so ist

$$u = u'; \qquad t\partial v = t'\partial v'$$

und da t, t' nur von u abhangen,

$$t' = \frac{t}{c}; \qquad v' = cv; \qquad c \text{ constant};$$

folglich die Gleichungen der zweiten Fläche:

$$x = \frac{t}{c}\cos cv; \qquad y = \frac{t}{c}\sin cv$$

Die dritte Coordinate ergiebt sich aus:

$$\partial z^2 = \partial s^2 - (\partial x^2 + \partial y^2) = \partial u^2 + t^2\partial v^2 - \left(\frac{\partial t^2}{c^2} + t^2\partial v^2\right) = \partial u^2 - \frac{\partial t^2}{c^2}$$

sie ist daher:

$$z = \int\sqrt{\partial u^2 - \frac{\partial t^2}{c^2}} \tag{94}$$

§. 51. **Fläche zweiten Grades. Reduction der Coordinatengleichung.** Die Gleichung einer Fläche 2. Grades ist eine beliebige Gleichung 2. Grades zwischen den cartesischen Coordinaten x, y, z:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hyz + 2Jzx + 2Kxy + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0$$

Durch besondere Lage des Axensystems lassen sich die 10 Terme auf höchstens 4 reduciren. Die Relationen zwischen den alten und neuen Coordinaten seien

$$\begin{aligned} x &= lx' + l_1y' + l_2z' \\ y &= mx' + m_1y' + m_2z' \\ z &= nx' + n_1y' + n_2z' \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \lambda &= Ax + Ky + Jz \\ \mu &= Kx + By + Hz \\ \nu &= Jx + Hy + Cz \\ \xi &= Lx + My + Nz \end{aligned}$$

so kann man die Flächengleichung schreiben:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + 2\xi + D = 0 \tag{95}$$

Nach Einführung der x', y', z' wird

$$\begin{aligned} \lambda &= (Al + Km + Jn)x' + (Al_1 + Km_1 + Jn_1)y' + (Al_2 + Km_2 + Jn_2)z' \\ \mu &= (Kl + Bm + Hn)x' + (Kl_1 + Bm_1 + Hn_1)y' + (Kl_2 + Bm_2 + Hn_2)z' \\ \nu &= (Jl + Hm + Cn)x' + (Jl_1 + Hm_1 + Cn_1)y' + (Jl_2 + Hm_2 + Cn_2)z' \end{aligned} \tag{96}$$

und Gl. (95) geht über in

$$(\lambda l+\mu m+\nu n)x'+(\lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1)y'+(\lambda l_2+\mu m_2+\nu n_2)z'+2\xi+D=0$$

Damit in dieser Gleichung 2. Grades die Producte $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ fehlen, hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} \lambda l+\mu m+\nu n &= h\,x' \\ \lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1 &= h_1 y' \\ \lambda l_2+\mu m_2+\nu n_2 &= h_2 z' \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \lambda &= h\,l\,x'+h_1\,l_1\,y'+h_2\,l_2\,z' \\ \mu &= h\,m\,x'+h_1 m_1 y'+h_2 m_2 z' \\ \nu &= h\,n\,x'+h_1\,n_1\,y'+h_2\,n_2\,z' \end{aligned}$$

Dies verglichen mit den Werten (96) giebt:

$$\left.\begin{aligned} (A-h)l+Km+Jn&=0 \\ Kl+(B-h)m+Hn&=0 \\ Jl+Hm+(C-h)n&=0 \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

nebst 2 analogen Gleichungssystemen, die sich nur durch die Indices bei l, m, n, h unterscheiden; daher gilt das Resultat der Elimination von l, m, n, nämlich

$$\begin{vmatrix} A-h & K & J \\ K & B-h & H \\ J & H & C-h \end{vmatrix}=0 \tag{98}$$

auch nach Substitution von h_1, h_2 für h, und h, h_1, h_2 sind Wurzeln derselben kubischen Gleichung. Nach Einsetzung der Wurzeln in Gl. (97) ergiebt sich für jede derselben ein System von Werten der l, m, n, z. B. für h_1 die Werte l_1, m_1, n_1. Multiplicirt man mit diesen einzeln die Gl. (97), so ist die Summe:

$$All_1+Bmm_1+Cnn_1+H(mn_1+nm_1)+J(nl_1+ln_1)+K(lm_1+ml_1)= h(ll_1+mm_1+nn_1)$$

Vertauscht man in dieser Gleichung die beiden Wertsysteme, so bleibt die Linke ungeändert, und nach Subtraction beider Gleichungen erhält man:

$$(h-h_1)(ll_1+mm_1+nn_1)=0 \tag{99}$$

Sind nun h und h_1 ungleich, so folgt:

$$ll_1+mm_1+nn_1=0$$

Wäre erstlich h nicht reell, so gäbe es eine zweite ungleiche und conjugirte Wurzel h_1, und beiden entsprechend würde man den Gl.

(97) durch conjugirte l, m, n genügen können. Nach Gl. (99) wären dann alle Moduln derselben null, also auch l, m, n selbst, was unmöglich ist. Folglich kann Gl. (98) nur reelle Wurzeln haben.

Ferner zeigt Gl. (99), dass die beiden Geraden, deren Richtungscosinus die l, m, n bezeichnen, normal zu einander sind. Unter Voraussetzung dreier ungleicher Wurzeln h, h_1, h_2 genügt daher ein orthogonales System den Bedingungen, welchem gemäss die Axen der x', y', z' bestimmt werden können.

Sind endlich h, h_1 zwei gleiche Wurzeln, so werden sie durch unendlich kleine Variation irgend eines Coefficienten ungleich. Lässt man nachher die Variation stetig verschwinden, so können die 2 normalen Geraden nicht stetig in einander übergehen. Da alsdann die linearen Gl. (97) 2 verschiedene Lösungen haben, so haben sie unbegrenzt viele; nur müssen die betreffenden Geraden, wofern h_2 ungleich ist, zur Geraden $(l_2 m_2 n_2)$ normal sein.

Die Flächengleichung ist jetzt auf die Form gebracht:

$$hx'^2 + h_1 y'^2 + h_2 z'^2 + 2dx' + 2d_1 y' + 2d_2 z' + D = 0 \qquad (100)$$

Ist nun keiner der Coefficienten h, h_1, h_2 null, so kann man den Anfangspunkt so verschieben, dass (ohne Beziehung zur anfänglichen Bedeutung von x, y, z)

$$x' = x - \frac{d}{h}; \quad y' = y - \frac{d_1}{h_1}; \quad z' = z - \frac{d_2}{h_2} \qquad (101)$$

wird; dann wird

$$hx^2 + h_1 y^2 + h_2 z^2 = P = \frac{d^2}{h} + \frac{d_1^2}{h_1} + \frac{d_2^2}{h_2} - D \qquad (102)$$

Ist P nicht null, so kann man

$$h = \frac{P}{a}; \quad h_1 = \frac{P}{b}; \quad h_2 = \frac{P}{c} \qquad (103)$$

setzen, und erhält:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \qquad (104)$$

In diesem Falle heisst die Fläche eine centrale. Die Fläche heisst ein Ellipsoid, einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid, jenachdem 3, 2 oder 1 der Grössen a, b, c positiv sind. Grenzfälle, welche krumme Flächen bilden, giebt es folgende. Ist $P = 0$, wo man die Gleichung in der Form schreiben kann

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0 \qquad (105)$$

so heisst die Fläche ein **Kegel**. Ist eine der Grössen h, h_1, h_2 null, und nicht gleichzeitig bzhw. d, d_1, d_2 null, so heisst die Fläche ein **Paraboloid**; ist hingegen bzhw. d, d_1, d_2 null, fällt also eine Coordinate aus der Gleichung heraus, ein **Cylinder**. Das letztere findet auch statt, wenn zwei der Grössen h, h_1, h_2 null sind, nachdem man die zur dritten gehörige Coordinate nach (106) transformirt, und durch Drehung des Axensystems um die bezügliche Axe die beiden übrigen linearen Terme auf einen reducirt hat. Das Paraboloid und der Cylinder in jenem Falle heissen **elliptisch** oder **hyperbolisch**, jenachdem die 2 nicht verschwindenden Coefficienten h gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Im letzten Falle heisst der Cylinder **parabolisch**.

§. 52. **Krümmungslinien auf der Fläche 2. Grades.** Stellt man die Coordinaten folgendermassen in Parametern u, v dar:

$$x^2 = \alpha(u-\alpha_1)(v-\alpha_2);\; y^2 = \beta(u-\beta_1)(v-\beta_2);\; z^2 = \gamma(u-\gamma_1)(v-\gamma_2) \quad (106)$$

so lassen sich die 9 Constanten α, β, γ, ... leicht so bestimmen, dass die Gleichung einer centralen Fläche 2. Grades (104) für ungleiche a, b, c erfüllt wird. Es muss dann sein

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0\\
&\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=0\\
&\frac{\alpha\alpha_2}{a}+\frac{\beta\beta_2}{b}+\frac{\gamma\gamma_2}{c}=0\\
&\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{a}+\frac{\beta\beta_1\beta_2}{b}+\frac{\gamma\gamma_1\gamma_2}{c}=1
\end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Die ersten 3 Gleichungen geben nach Elimination von α, β, γ

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dem wird allgemein genügt durch

$$\alpha_2 = \lambda + \mu\alpha_1;\quad \beta_2 = \lambda + \mu\beta_1;\quad \gamma_2 = \lambda + \mu\gamma_1$$

Führt man diese Werte in (106) ein, und schreibt für $\frac{v-\lambda}{\mu}$ wieder v, für $\alpha\mu$, $\beta\mu$, $\gamma\mu$ wieder α, β, γ, so erhält man das Resultat, welches den Werten $\lambda = 0$; $\mu = 1$ entsprechen würde. Jetzt fallen 2 der Gl. (107) zusammen, und es bleibt nur das System:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0$$

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=0$$

$$\frac{\alpha\alpha_1^2}{a}+\frac{\beta\beta_1^2}{b}+\frac{\gamma\gamma_1^2}{c}=1$$

welches durch

$$\alpha=a\frac{\gamma_1-\beta_1}{\delta_1};\quad \beta=b\frac{\alpha_1-\gamma_1}{\delta_1};\quad \gamma=c\frac{\beta_1-\alpha_1}{\delta_1}$$
$$\delta_1=(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_1-\alpha_1)(\alpha_1-\beta_1)$$

erfüllt wird. Die Gl. (106) geben differentiirt:

$$2\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{x}{u-\alpha_1};\quad 2\frac{\partial x}{\partial v}=\alpha\frac{u-\alpha_1}{x};\quad \text{etc.}$$

$$4\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=\alpha;\quad \text{etc.}\quad \text{folglich}$$

$$f=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$$

Damit also das System der (uv) orthogonal sei, hat man zu setzen:

$$a(\gamma_1-\beta_1)+b(\alpha_1-\gamma_1)+c(\beta_1-\alpha_1)=0\quad \text{oder}$$
$$\alpha_1(b-c)+\beta_1(c-a)+\gamma_1(a-b)=0$$

Dem wird allgemein genügt durch

$$\alpha_1=\lambda+\mu a;\quad \beta_1=\lambda+\mu b;\quad \gamma_1=\lambda+\mu c$$

Es hat sich jedoch oben gezeigt, dass man ohne Einbusse an Allgemeinheit $\lambda=0$; $\mu=1$ setzen kann. Dann werden die Gleichungen der Fläche in orthogonalen Parametern u, v:

$$\left.\begin{aligned}x^2=a\frac{c-b}{d}(u-a)(v-a);\quad y^2=b\frac{a-c}{d}(u-b)(v-b)\\ z^2=c\frac{b-a}{d}(u-c)(v-c)\\ d=(b-c)(c-a)(a-b)\end{aligned}\right\}\quad (108)$$

Hieraus ergeben sich die Werte:

$$pt=\frac{dx^2yz}{a}\frac{u-v}{UV};\quad qt=\frac{dxy^2z}{b}\frac{u-v}{UV}\quad (109)$$
$$rt=\frac{dxyz^2}{c}\frac{u-v}{UV}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$U = (u-a)(u-b)(u-c); \quad V = (v-a)(v-b)(v-c) \tag{110}$$

Die Quadratsumme giebt:

$$t = dxyz \frac{u-v}{4UV} \sqrt{\frac{uv}{abc}} \tag{111}$$

daher nach Division:

$$p = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad q = \frac{y}{b} \sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad r = \frac{z}{c} \sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{112}$$

Ferner findet man:

$$e = \frac{u}{4} \frac{v-u}{U}; \quad g = \frac{v}{4} \frac{u-v}{V} \tag{113}$$

$$E = \frac{u-v}{4U} \sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad F = 0; \quad G = \frac{v-u}{4V} \sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{114}$$

Hiernach sind u, v Parameter der Krümmungslinien. In diesem Falle erhält man die Hauptkrümmungen durch Division der vorstehenden Grössen, nämlich:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{u} \sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v} \sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{115}$$

Die Krümmung der Fläche ist also positiv oder negativ, jenachdem u und v gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Damit aber die Ausdrücke, wie schon oben der von t, reell werden, muss uv gleiches Vorzeichen mit abc haben. Dies ergiebt:

Das Vorzeichen der Krümmung ist stets das von abc; sie ist positiv beim Ellipsoid und zweischaligen Hyperboloid, negativ beim einschaligen Hyperboloid.

Nach Gl. (103) ist nun

$$abc = \frac{P^3}{hh_1h_2} \tag{116}$$

Da h, h_1, h_2 die Wurzeln der Gl. (98) sind, so ist

$$hh_1h_2 = \begin{vmatrix} A & K & J \\ K & B & H \\ J & H & C \end{vmatrix} \tag{117}$$

Ferner sind d, d_1, d_2 in (100) als Abkürzungen eingeführt für

6*

$$\left.\begin{aligned} d &= Ll + Mm + Nn \\ d_1 &= Ll_1 + Mm_1 + Nn_1 \\ d_2 &= Ll_2 + Mm_2 + Nn_2 \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Eliminirt man l, m, n zwischen der ersten dieser Gleichungen und den 3 Gl. (97), in welchen man die Terme hl, hm, hn vorher absondert, so kommt:

$$\begin{vmatrix} A\,K\,J & hl \\ K\,B\,H & hm \\ J\,H\,C & hn \\ L\,M\,N & d \end{vmatrix} = 0 \qquad (119)$$

Diese Gleichung hat 2 analoge, welche nur in der letzten Verticalreihe durch die Indices 1, 2 unterschieden sind. Addirt man alle drei nach Multiplication mit

$$\frac{d}{h} \quad \frac{d_1}{h_1} \quad \frac{d_2}{h_2}$$

so kommt, mit Beachtung von (118) und (102):

$$\begin{vmatrix} A\,K\,J & L \\ K\,B\,H & M \\ J\,H\,C & N \\ L\,M\,N & D+P \end{vmatrix} = 0 \qquad (120)$$

Entwickelt man hieraus den Wert von P und setzt ihn in Gl. (116) ein, so erhält man:

$$abc = - \begin{vmatrix} A\,K\,J\,L \\ K\,B\,H\,M \\ J\,H\,C\,N \\ L\,M\,N\,D \end{vmatrix}^3 \cdot \begin{vmatrix} A\,K\,J \\ K\,B\,H \\ J\,H\,C \end{vmatrix}^{-4} \qquad (121)$$

Hiernach ist das Vorzeichen der Krümmung immer entgegengesetzt dem der Determinante 4. Ordnung, die man nach vorstehender Anordnung aus sämmtlichen Coefficienten der ursprünglichen Gleichung bildet.

Ist diese Determinante 4. Ordnung null, so verschwindet nach (120) auch P, und die Fläche wird ein Kegel. Für diesen Fall kann man 2 der Gl. (107), deren letzte zur Rechten 0 statt 1 hat, durch $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ erfüllen; die übrigen Bestimmungen bleiben unverändert, und die Gleichungen der Fläche in Parametern der Krümmungslinien lauten, wenn wir $-u^2$ statt u schreiben:

$$\left.\begin{array}{c} x^2 = a\frac{b-c}{d}u^2(v-a); \quad y^2 = b\frac{c-a}{d}u^2(v-b) \\ z^2 = c\frac{a-b}{d}u^2(v-c) \end{array}\right\} \tag{122}$$

Die Fundamentalgrössen werden:

$$\left.\begin{array}{l} e = 1; \quad f = 0; \quad g = -\frac{u^2 v}{4V}; \quad t = \frac{u}{2}\sqrt{-\frac{v}{V}} \\ E = 0; \quad F = 0; \quad G = \frac{u^2}{4V}\sqrt{\frac{abc}{-v}} \end{array}\right\} \tag{123}$$

die Richtungscosinus der Normale:

$$p = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{-v}}; \quad q = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{abc}{-v}}; \quad r = \frac{z}{c}\sqrt{\frac{abc}{-v}} \tag{124}$$

die Hauptkrümmungen:

$$\frac{1}{\varrho_1} = 0; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\sqrt{\frac{abc}{-v}} \tag{125}$$

Die Fläche ist also abwickelbar, und die Parameter orthogonal geodätisch.

Ist statt dessen die Determinante 3. Ordnung, d. i. hh_1h_2, null, z. B. $h_2 = 0$, so ist die Fläche ein Paraboloid oder, im besondern Falle, Cylinder. Setzt man $z - \sqrt{c}$, $a\sqrt{c}$, $b\sqrt{c}$, $u\sqrt{c}$, $v\sqrt{c}$ für z, a, b, u, r, und dann $c = \infty$, wie es dem $h_2 = 0$ entspricht, so wird Gl. (104):

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z \tag{126}$$

und die Gl. (108):

$$\left.\begin{array}{c} x^2 = \frac{a(u-a)(v-a)}{b-a}; \quad y^2 = \frac{b(u-b)(v-b)}{a-b} \\ 2z = u + v - a - b) \end{array}\right\} \tag{127}$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{ab}{uv}}; \quad q = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{ab}{uv}}; \quad r = -\sqrt{\frac{ab}{uv}} \\ e = \frac{u(u-v)}{4(u-a)(u-b)}; \quad g = \frac{v(v-u)}{4(v-a)(v-b)} \\ E = \frac{v-u}{4(u-a)(u-b)}\sqrt{\frac{ab}{uv}}; \quad G = \frac{u-v}{4(v-a)(v-b)}\sqrt{\frac{ab}{uv}} \\ \frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{u}\sqrt{\frac{ab}{uv}}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\sqrt{\frac{ab}{uv}} \end{array}\right\} \tag{128}$$

$$\left.\begin{array}{l} d = Ll + Mm + Nn \\ d_1 = Ll_1 + Mm_1 + Nn_1 \\ d_2 = Ll_2 + Mm_2 + Nn_2 \end{array}\right\} \quad (118)$$

Eliminirt man l, m, n zwischen der ersten dieser Gleichungen und den 3 Gl. (97), in welchen man die Terme hl, hm, hn vorher absondert, so kommt:

$$\begin{vmatrix} A\,K\,J & hl \\ K\,B\,H & hm \\ J\,H\,C & hn \\ L\,M\,N & d \end{vmatrix} = 0 \quad (119)$$

Diese Gleichung hat 2 analoge, welche nur in der letzten Verticalreihe durch die Indices 1, 2 unterschieden sind. Addirt man alle drei nach Multiplication mit

$$\frac{d}{h} \quad \frac{d_1}{h_1} \quad \frac{d_2}{h_2}$$

so kommt, mit Beachtung von (118) und (102):

$$\begin{vmatrix} A\,K\,J & L \\ K\,B\,H & M \\ J\,H\,C & N \\ L\,M\,N & D+P \end{vmatrix} = 0 \quad (120)$$

Entwickelt man hieraus den Wert von P und setzt ihn in Gl. (116) ein, so erhält man:

$$abc = -\begin{vmatrix} A\,K\,J\,L \\ K\,B\,H\,M \\ J\,H\,C\,N \\ L\,M\,N\,D \end{vmatrix}^3 \cdot \begin{vmatrix} A\,K\,J \\ K\,B\,H \\ J\,H\,C \end{vmatrix}^{-4} \quad (121)$$

Hiernach ist das Vorzeichen der Krümmung immer entgegengesetzt dem der Determinante 4. Ordnung, die man nach vorstehender Anordnung aus sämmtlichen Coefficienten der ursprünglichen Gleichung bildet.

Ist diese Determinante 4. Ordnung null, so [illegible] (120) auch P, und die F[illegible] wird ein Kegel. [illegible] man 2 der Gl. (107), d[illegible]tzte zur Recht[illegible] $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ erf[illegible]e übrigen [illegible] verändert, und die G[illegible] der Flä[illegible] mungslinien lauten, [illegible] $-u^2$ st[illegible]

die Hauptkrümmungs-

Die

dürfen

z. B.

Falle

und

4)



.35)

und

Nach

nach

alsdann

$$-a$$

$$(a-c)$$

Für die Fälle der Cylinder, wo die Relationen der Coordinaten bzhw. lauten

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1; \quad x^2 = 2ay \tag{129}$$

stellen sich letztere in orthogonal geodätischen Parametern der Krümmungslinien bzhw. folgendermassen dar:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = a\dfrac{v-a}{b-a}; \quad y^2 = b\dfrac{v-b}{a-b}; \quad z = u \\ x^2 = 2av; \quad y = v; \quad z = u \end{array}\right\} \tag{130}$$

Da indes alle hier besprochenen Probleme auf Abwickelbaren allgemeine Lösung gefunden haben, so können wir die Abwickelbaren 2. Grades, Kegel und Cylinder, ausser Betracht lassen. Dusselbe gilt von den Rotationsflächen 2. Grades, welche in der Gleichungsform (108) nicht mit begriffen sind, die jedoch als Specialitäten in der Theorie der Rotationsflächen keine instructiven Seiten darbieten. Auch von den Paraboloiden brauchen wir nicht besonders zu handeln, da sich durch die oben aufgestellte Substitution und Uebergang zum Grenzwert die Resultate leicht auf sie übertragen lassen.

Für die Krümmungslinien sind noch die Nabelpunkte von Bedeutung. Man findet aus (115), indem man $\varrho_1 = \varrho_2$ setzt, die Bedingung $u = v$. Dann aber muss in (108) der constante Coefficient jedes nicht verschwindenden der 3 Ausdrücke positiv sein. Da die Summe der Coefficienten null ist, so ist mindestens einer negativ, folglich eine der Coordinaten, z. B. $y = 0$, und man hat:

$$u = v = b$$

Es giebt alsdann entsprechend den Doppelvorzeichen von x und z vier Nabelpunkte auf der Ebene $y = 0$.

§. 53. **Confocales dreifach orthogonales Flächensystem 2. Grades.** Lässt man a, b, c, u, v mit einem dritten Parameter w gleichzeitig um gleiche Incremente variiren, oder, was dasselbe ist, substituirt man $a-w$, $b-w$, $c-w$, $u-w$, $v-w$ für a, b, c, u, v, so gehen die Gl. (108) über in

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{b-c}{d}(u-a)(v-a)(w-a) \\[2ex] y^2 = \dfrac{c-a}{d}(u-b)(v-b)(w-b) \\[2ex] z^2 = \dfrac{a-b}{d}(u-c)(v-c)(w-c) \end{array}\right\} \tag{131}$$

Da sie symmetrisch in u, v, w sind, so folgt, dass die oben hergeleiteten Resultate für die Fläche $w = 0$, welche offenbar für die ganze Schar von Flächen $w =$ const. gelten, auch auf die beiden Scharen von Flächen $u =$ const. und $v =$ const. angewandt werden können. Demnach schneiden sich alle 3 Flächenscharen in ihren Krümmungslinien, und dass dies unter rechten Winkeln geschieht, folgt aus der auf alle anzuwendenden Gleichung $f = 0$, der gemäss die Tangenten der Schnittlinien auf einander senkrecht stehen, mithin mit den Normalen einzeln zusammenfallen. Daher sind die Gl. (131) der Ausdruck eines dreifach orthogonalen Flächensystems.

Eliminirt man je 2 Parameter, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + \frac{z^2}{c-u} = 1 \\ \frac{x^2}{a-v} + \frac{y^2}{b-v} + \frac{z^2}{c-v} = 1 \\ \frac{x^2}{a-w} + \frac{y^2}{b-w} + \frac{z^2}{c-w} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

als Ausdruck der einzelnen 3 Flächenscharen. Die dritte Gleichung ergiebt sich aus (104) durch die genannte Substitution; die andern folgen durch Analogie.

§. 54. **Asymptotische Linien auf Flächen 2. Grades.** Die Gleichung der asymptotischen Richtungen $E\partial u^2 + G\partial v^2 = 0$ wird nach (114):

$$\frac{\partial u^2}{U} = \frac{\partial v^2}{V} \tag{133}$$

und zerfällt in

$$\frac{\partial u}{\sqrt{U}} + \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = 0; \quad \frac{\partial u}{\sqrt{U}} - \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = 0 \tag{134}$$

Die Integrale können wir folgendermassen schreiben:

$$\int_a \frac{\partial u}{\sqrt{U}} + \int_a \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = \int_a \frac{\partial u_1}{\sqrt{U_1}}; \quad \int_a \frac{\partial u}{\sqrt{U}} - \int_a \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = \int_a \frac{\partial v_1}{\sqrt{V_1}} \tag{135}$$

wo U_1, V_1 dieselben Functionen von u_1, v_1 sind, wie U von u und V von v, so dass für $v = a$ bzhw. u in u_1 und in v_1 übergeht. Nach dem Additionstheorem elliptischer Functionen, welches sich nach Lagrange's Methode hier besonders einfach herleiten lässt, ist alsdann

$$\frac{u-v}{\sqrt{(u-a)(v-b)(v-c)} - \sqrt{(v-a)(u-b)(u-c)}} = \sqrt{\frac{u_1-a}{(a-b)(a-c)}} \tag{136}$$

$$\frac{u-v}{\sqrt{(u-a)(v-b)(v-c)}+\sqrt{(v-a)(u-b)(u-c)}}=\sqrt{\frac{v_1-a}{(a-b)(a-c)}} \tag{137}$$

Die rechten Seiten ergeben sich aus den linken, indem man $v=a$ setzt. Nach demselben Gesetz findet man auch deren Werte, wenn zur Linken a, b, c vertauscht werden: es muss, wenn a in b und in c übergeht, v_1 bzhw. übergehen in

$$c+\frac{(a-c)(b-c)}{v_1-c} \quad \text{und} \quad b+\frac{(a-b)(c-b)}{v_1-b} \tag{138}$$

Lässt man nun den Punkt (xyz) längs der asymptotischen Linie $v_1=$ const. variiren, so hat man nach (135):

$$\frac{\partial u}{\partial u_1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{U_1}}; \quad \frac{\partial v}{\partial v_1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U_1}}$$

und findet nach Differentiation der Gl. (108):

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\frac{x}{4\sqrt{U_1}}\left(\frac{\sqrt{U}}{u-a}+\frac{\sqrt{V}}{v-a}\right)$$

das ist vermöge der Gl. (137):

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=x\,\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{U_1(u-a)(v-a)(v_1-a)}}$$

und nach Einsetzung des Wertes (108) von x:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{a}{U_1(v_1-a)}}$$

Vertauscht man a mit b und c, so geht x in y und z über. Mit Beachtung der Wirkung (138) auf v_1 findet man:

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{b(v_1-c)}{U_1(c-b)(v_1-a)}}; \quad \frac{\partial z}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{c(v_1-b)}{U_1(b-c)(v_1-a)}}$$

Die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate giebt, übereinstimmend mit dem aus den Fundamentalgrössen resultirenden Werte:

$$\frac{\partial s}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4\sqrt{U_1}} \tag{139}$$

woraus:

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\sqrt{\frac{a}{v_1-a}}; \quad \frac{\partial y}{\partial s}=\sqrt{\frac{b(v_1-c)}{(c-b)(v_1-a)}} \quad \frac{\partial z}{\partial s}=\sqrt{\frac{c(v_1-b)}{(b-c)(v_1-a)}} \tag{140}$$

Hiernach ist die asymptotische Linie, da ihre Richtung sich als constant erweist, gerade. Ihren Ausgangspunkt können wir noch beliebig wählen; er sei ihr Durchschnitt mit der Krümmungslinie $v = a$, das ist mit der Ebene $x = 0$, wo, wie wir sahen, $u = v_1$ wird. Dies giebt nach (108) die Coordinatenwerte

$$x = 0; \quad y = \sqrt{\frac{b(v_1 - b)}{c - b}}; \quad z = \sqrt{\frac{c(v_1 - b)}{b - c}}$$

Integrirt man jetzt die Gl. (140), so erhält man als Gleichungen der asymptotischen Linie $v_1 = \text{const.}$

$$\left.\begin{aligned} x = s\sqrt{\frac{a}{v_1 - a}}, \quad y &= \sqrt{\frac{b}{c - b}}\left(\sqrt{v_1 - b} + s\sqrt{\frac{v_1 - c}{v_1 - a}}\right) \\ z &= \sqrt{\frac{c}{b - c}}\left(\sqrt{v_1 - c} - s\sqrt{\frac{v_1 - b}{v_1 - a}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Sie erzeugt bei variirendem v_1 die Fläche (104), deren Gleichung in der Tat erfüllt wird, wenn man die Vorzeichen innerhalb der binomischen Factoren von y und z entgegengesetzt bestimmt, während im übrigen die Vorzeichen der Wurzelgrössen beliebig sind. Die zweite asymptotische Linie $u_1 = \text{const.}$ ist offenbar in gleichem Falle: es ändern sich nur einige Vorzeichen, wenn man u_1 für v_1 substituirt. Um die Fläche in asymptotischen Parametern u_1, v_1 darzustellen, hat man in (108) für u, v ihre aus (136) (137) zu entwickelnden Werte zu setzen, eine Rechnung die durch Zuhülfenahme der Analogen sehr erleichtert wird.

§. 55. **Kürzeste Linien auf Flächen 2. Grades.** Sei s der Bogen, τ der Krümmungswinkel einer Kürzesten, u, v Parameter der Krümmungslinien; dann erhält man durch Differentiation der Gl. (108) längs s:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{u - a}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{v - a}\frac{\partial v}{\partial s}\right); \quad \text{etc.}$$

woraus man leicht berechnet:

$$R = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{b}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = \frac{u - v}{4}\left\{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{U}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\right\} \quad (142)$$

oder, da nach (113)

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + g\,\partial v^2 = \frac{u - v}{4}\left(\frac{v\,\partial v^2}{V} - \frac{u\,\partial u^2}{U}\right) \quad (143)$$

ist:

$$R = \frac{U\partial v^2 - V\partial u^2}{Uv\partial v^2 - Vu\,\partial u^2} \quad (144)$$

Differentiirt man zweimal die Gl. (104), so kommt:

$$\frac{x}{a}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{y}{b}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{z}{c}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+R=0 \tag{145}$$

Nun ist, vermöge der Eigenschaft der Kürzesten und nach (112)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)=p=\frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad \text{etc.}$$

und da die Quadratsumme der Analogen $= 1$ sein muss,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{uv}{abc} \tag{147}$$

folglich, nach Einführung in (145):

$$R=-\frac{\partial \tau}{\partial s}\sqrt{\frac{uv}{abc}} \tag{148}$$

Differentiirt man jetzt die Gl. (142) (147) und substituirt die Werte (146), so findet man:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}=2\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\sqrt{\frac{abc}{uv}}=\sqrt{\frac{abc}{uv}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{uv}{abc}\right)$$

und nach Elimination von $\partial\tau$ mittelst (148):

$$\frac{\partial R}{R}=-\frac{\partial(uv)}{uv}$$

integrirt:

$$Ruv=h$$

Setzt man für R den Wert (144) und entwickelt das Verhältniss $\partial u:\partial v$, so kommt:

$$\sqrt{u}\,\partial u\sqrt{V(v-h)}=\pm\sqrt{v}\,\partial v\sqrt{U(u-h)}$$

daher nach zweiter Integration:

$$\int \partial u\sqrt{\frac{u}{U(u-h)}}=\pm\int \partial v\sqrt{\frac{v}{V(v-h)}} \tag{149}$$

Dies ist die Gleichung der Kürzesten. Für $h=0$ geht sie in die gerade asymptotische Linie über.

§. 56. **Orthogonal geodätische Systeme auf Flächen 2. Grades.** Sind u_1, v_1 die orthogonal geodätischen Parameter, also $e_1=1$; $f_1=0$; $g_1=t_1^2$, so lauten die Bedingungen II. Gl. (1) zufolge der Werte (113) von e, f, g:

$$u\,\frac{v-u}{4U} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + t_1^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial u}\,\frac{\partial u_1}{\partial v} + t_1^2\,\frac{\partial v_1}{\partial u}\,\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$v\,\frac{u-v}{4U} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + t_1^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

Nun ist die zum gesuchten Systeme gehörige Schar Kürzester schon aus (149) bekannt; ihre Gleichung lautet:

$$\int \partial u \sqrt{\frac{u}{U(u-h)}} - \int \partial v \sqrt{\frac{v}{V(v-h)}} = \frac{v_1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (150)$$

woraus:

$$\frac{\partial v_1}{\partial u} = \sqrt{\frac{\varepsilon u}{U(u-h)}}:\quad \frac{\partial v_1}{\partial v} = -\sqrt{\frac{\varepsilon v}{V(v-h)}}$$

Dies eingeführt giebt:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = \frac{u}{U}\left(\frac{v-u}{4} - \frac{\varepsilon t_1^2}{u-h}\right):\quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = \frac{v}{V}\left(\frac{u-v}{4} - \frac{\varepsilon t_1^2}{v-h}\right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\,\frac{\partial u_1}{\partial v} = \varepsilon t_1^2 \sqrt{\frac{uv}{UV(u-h)(v-h)}}$$

Das Product der ersten 2 Grössen gleich dem Quadrat der dritten giebt eine lineare Gleichung für t_1^2, aus welcher der Wert

$$\sqrt{\varepsilon t_1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(u-h)(v-h)}$$

hervorgeht. Nach dessen Einsetzung hat man sogleich:

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u(h-u)}{U}};\quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{v(h-v)}{V}}$$

und die Gleichung der geodätischen Parallelenschar lautet:

$$\int \partial u \sqrt{\frac{u(h-u)}{U}} + \int \partial v \sqrt{\frac{v(h-v)}{V}} = u_1 \qquad (151)$$

Da hier u_1 einen reellen Curvenbogen bezeichnet, so folgt durch Vergleichung der Wurzelausdrücke mit denen in (150), dass ε negativ reell ist. Setzt man $\varepsilon = -\frac{1}{4}$, so wird

$$t_1 = \sqrt{(u-h)(h-v)} \qquad (152)$$

$$\int \partial u \sqrt{\frac{u}{U(h-u)}} - \int \partial v \sqrt{\frac{v}{V(h-v)}} = 2v_1 \qquad (153)$$

§. 57. **Conforme Abbildung der Flächen 2. Grades auf der Ebene.** Sind u_1, v_1 die Abbildungsparameter, so ist die Bedingung $e_1 = g_1$; $f_1 = 0$. Dieser kann man schon dadurch genügen, dass man u_1 zur Function von u und v_1 zur Function von v macht, wo u, v Parameter der Krümmungslinien; denn dann wird

$$e = \frac{u}{4}\,\frac{v-u}{U} = e_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2; \qquad g = \frac{v}{4}\,\frac{u-v}{V} = e_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

also nach einfachster Disposition

$$e_1 = \pm\frac{u-v}{4} \tag{154}$$

$$u_1 = \int \partial u \sqrt{\frac{\mp u}{U}}; \quad v_1 = \int \partial v \sqrt{\frac{\pm v}{V}} \tag{155}$$

§. 58. **Asymptotische Fläche dritten Grades und deren Krümmungslinien.** Die Fläche 3. Grades, deren Gleichung ist

$$xyz = \sqrt{c} \tag{156}$$

und die wir mit dem vorstehenden Namen bezeichnen, ist bemerkenswert, sofern sich aus ihr ein dreifach orthogonales Flächensystem herleiten lässt. Setzt man

$$3m = x^2 + y^2 + z^2; \quad 3n = y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \tag{157}$$

so sind x^2, y^2, z^2 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^6 - 3mx^4 + 3nx^2 - c = 0 \tag{158}$$

in welcher demnach x mit y und z vertauscht werden kann. Gl. (156) differentiirt giebt:

$$yz\,\partial x + zx\,\partial y + xy\,\partial z = 0$$

Demzufolge muss sein:

$$p : q : r = yz : zx : xy$$

woraus mit Anwendung von (157) (156):

$$p = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{c}{3n}}; \quad q = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{c}{3n}}; \quad r = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{c}{3n}} \tag{159}$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen, so kommt:

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial n}{2n} = 0 \tag{160}$$

Variirt der Punkt (xyz) längs einer Krümmungslinie, so ist nach II. Gl. (19)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{l}{n}\sqrt{\frac{c}{3n}} = -\frac{l}{n}px$$

wo $l = \frac{n}{\varrho_1}\sqrt{\frac{3n}{c}}$ oder $\frac{n}{\varrho_2}\sqrt{\frac{3n}{c}}$ Hiernach wird Gl. (160)

$$\frac{n\partial x}{x} - lx\partial x + \tfrac{1}{2}\partial n = 0$$

woraus nach Multiplication mit $y^2 + z^2 = 3m - x^2$:

$$3mn\frac{\partial x}{x} - nx\partial x - l(y^2 + z^2)x\partial x + \tfrac{1}{2}(y^2 + z^2)\partial n = 0$$

Addirt man die Analogen beider Gleichungen, so kommt:

$$\partial n = l\partial m; \quad (2m - l)\partial n = n\partial m$$

woraus:

$$n = l(2m - l) \tag{161}$$

und nach Elimination von n:

$$l\partial m = 2(l - m)\partial l$$

integrirt:

$$l^2(2l - 3m) = u \tag{162}$$

Entsprechend den 2 Werten von l

$$l = m \pm \sqrt{m^2 - n}$$

wie sie aus (161) hervorgehen, erhält man für jeden Punkt (xyz) 2 Werte der Constanten u, v, und die Gleichungen der 2 Scharen von Krümmungslinien werden nach Einführung in (162):

$$\left.\begin{aligned} m(2m^2 - 3n) + 2(m^2 - n)^{\frac{3}{2}} &= u \\ m(2m^2 - 3n) - 2(m^2 - n)^{\frac{3}{2}} &= v \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Um jetzt x, y, z in Parametern der Krümmungslinien u, v darzustellen, hat man nach einander die 2 kubischen Gleichungen zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} m^3 - 3\left(\frac{u-v}{4}\right)^{\frac{2}{3}} m + \frac{u+v}{2} &= 0 \\ (x^2 - m)^3 - 3\left(\frac{u-v}{4}\right)^{\frac{2}{3}}(x^2 - m) &= \frac{u+v}{2} + c \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Die 3 Wurzeln der letztern sind x^2, y^2, z^2.

§. 59. **Dreifach orthogonales Flächensystem, dessen eine Schar asymptotische Flächen 3. Grades bilden.** Setzt man in den Gl. (163) (156) für die Constante c die Variabele w und für u, v die mit w variirenden u_1, v_1, so erhält man eine Schar asymptotischer Flächen

$w =$ const. und auf diesen, bei allein variirendem w, 2 Scharen Krümmungslinien, welche 2 Flächen $v =$ const. und $u =$ const. bilden. Letztere Flächen schneiden einander rechtwinklig; durch Bestimmung von u_1, v_1 kann man bewirken, dass sie auch die Fläche $w =$ const. rechtwinklig schneiden. Die Gleichungen der Flächen $u =$ const., $w =$ const. können wir schreiben:

$$M - u_1 = 0; \quad x^2 y^2 z^2 = w$$

wo M die linke Seite der ersten Gl. (163) bezeichnet. Dann verhalten sich die Richtungscosinus der Normale der Fläche $u =$ const. wie

$$\frac{\partial(M-u_1)}{\partial x} : \frac{\partial(M-u_1)}{\partial y} : \frac{\partial(M-u_1)}{\partial z}$$

und die der Fläche $w =$ const. nach (159) wie

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$$

folglich ist die Bedingung des rechtwinkligen Schnitts:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial(M-u_1)}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial(M-u_1)}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial(M-u_1)}{\partial z} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial M}{\partial m}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial m}{\partial z}\right) + \frac{\partial M}{\partial n}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial n}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial w}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

das ist nach den Werten (157) (156) von m, n, w:

$$\frac{\partial M}{\partial m} + 2\frac{\partial M}{\partial n} m = 3\frac{\partial u_1}{\partial w} n$$

Durch Differentiation findet man:

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 3(2m^2 - n + 2m\sqrt{m^2 - n}); \quad \frac{\partial M}{\partial n} = -3(m + \sqrt{m^2 - n})$$

dies eingeführt giebt:

$$\frac{\partial u_1}{\partial w} = -1$$

integrirt, und nach Analogie:

$$u_1 = u - w; \quad v_1 = v - w$$

Demnach sind die Gleichungen der 3 orthogonalen Flächenscharen:

$$\left.\begin{aligned} m(2m^2-3n)+2(m^2-n)^{\frac{3}{2}}+x^2y^2z^2 &= u \\ m(2m^2-3n)-2(m^2-n)^{\frac{3}{2}}+x^2y^2z^2 &= v \\ x^2y^2z^2 &= w \end{aligned}\right\} \quad (165)$$

deren erste beiden vom 12ten Grade sind.

Anhang.

Uebersicht über die Probleme der Flächentheorie.

Im folgenden sollen diejenigen allgemeinen Probleme nebst ihren speciellen Lösungen zusammengestellt werden, welche im Laufe der vorstehenden Abhandlung zur Besprechung gelangt sind.

I. Darstellung der Schar orthogonaler Trajectorien einer gegebenen Schar von Linien.

Bedingung: $f=0$ §. 22. lineare Gleichung 1. Ordnung.

Specielle Lösungen

1) für die Fälle dargestellter Krümmungslinien s. Probl. II.
2) für die Fälle dargestellter Scharen Kürzester s. Probl. IV.
3) für die Fälle bekannter Abbildungsparameter s. Probl. V.

II. Darstellung des Systems der Krümmungslinien auf gegebener Fläche.

Bedingung: $f=0$; $F=0$ §. 23. höhere Gleichung 1. Ordnung.

Ohne Bedeutung auf Ebene und Kugel.

Lösung unmittelbar vorliegend

1) auf Abwickelbarer §. 34.
2) auf Rotationsfläche §. 46.

Gelöst
3) auf kleinster Fläche §. 42.
4) auf Fläche constanter Summe der Hauptkrümmungsradien §. 44.
5) auf Flächen 2. Grades §. 52.
6) auf der asymptotischen Fläche 3. Grades §. 58.

III. Darstellung des Systems asymptotischer Linien auf gegebener Fläche.

Bedingung: $E=0$; $G=0$ §. 28. höhere Gleichung 1. Ordnung.

Ohne Bedeutung auf abwickelbaren und positiv gekrümmten Flächen.

Gelöst
1) auf kleinster Fläche §. 43.
2) auf Fläche constanter Summe der Hauptkrümmungsradien §. 44.
3) auf Rotationsfläche §. 47.
4) auf Flächen 2. Grades §. 54.

IV. Darstellung des allgemeinen orthogonal geodätischen Systems auf gegebener Fläche.

Bedingung: $e = 1$; $f = 0$ §. 30. 31. höhere Gleichung 2. Ordnung.
Gelöst 1) auf Abwickelbarer (anwendbar auf Ebene) §. 35. 36.
2) auf Rotationsfläche §. 48.
3) auf Flächen 2. Grades §. 56.
4) specielles System von Kürzesten auf Mittelpunktsflächen bei bekannten Krümmungslinien auf der Urfläche.

V. Conforme Abbildung gegebener Fläche auf Ebene.

Bedingung: $e = g$; $f = 0$ §. 33.
Gelöst 1) für Abwickelbare §. 36. 37.
2) für Rotationsfläche §. 49.
3) für Flächen 2. Grades §. 57.

VI. Darstellung der allgemeinsten auf gegebener Fläche abwickelbaren Fläche.

Bedingung: e, f, g gegebene Functionen von u, v §. 17. System höherer Gleichungen 1. Ordnung.
Gelöst 1) auf der Ebene §. 36. 37.
2) Rotationsfläche auf Rotationsfläche §. 50.

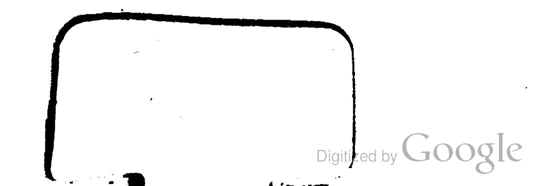
VII. Darstellung des allgemeinsten dreifach orthogonalen Flächensystems.

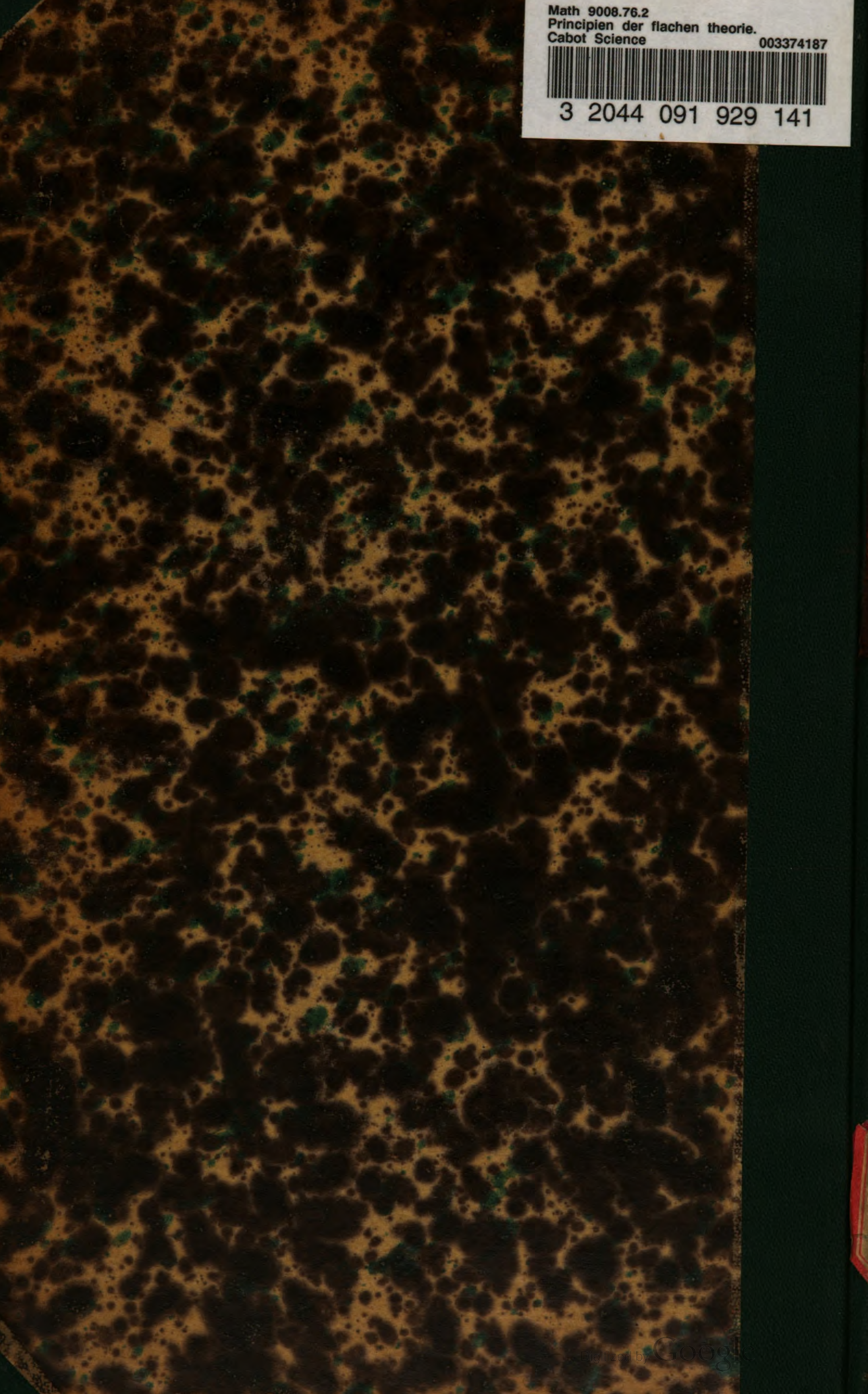
Bedingung: $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 0$ §. 26. System linearer Gleichungen 1. und 2. Ordnung.
Specielles System
1) confocales System 2. Grades §. 53.
2) System asymptotischer Flächen 3. Grades §. 59.

VIII. Darstellung der allgemeinsten Fläche in Parametern der Krümmungslinien für gegebene Indicatrix der Normale.

Bedingung: 1 lineare Gleichung 2. Ordnung §. 25. Gl. (27).
Gelöst für die Fälle, wo die rechte Seite der Gleichung verschwindet, d. i.
1) wenn die stereographische Projection der gegebenen Indicatrix aus 2 Kreisscharen,
2) aus einer Schar Gerader und paralleler Trajectorien besteht.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.




Math 9008.76.2
Principien der flachen theorie.
Cabot Science
003374187
3 2044 091 929 141